

Esercizi n.3

key words: successione di funzioni, convergenza puntuale, convergenza uniforme, continuità del limite, teorema dei due limiti, passaggi al limite sotto il segno, serie di funzioni, convergenza totale, serie di potenze, raggio di convergenza, funzione esponenziale complessa.

1) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1-x & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

3) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_n (\sqrt[1+\alpha]{1+(nx)^\alpha} - \sqrt[1+\alpha]{(nx)^\alpha}) \quad \text{per } x \in]0, +\infty[.$$

Dire per quali valori di α la convergenza è uniforme.

4) Trovare l'insieme di convergenza E delle serie di seguito indicate e dire su quali sottoinsiemi di E c'è convergenza totale

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n|x^2-x|}}{n \log^2 n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}\right), \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}.$$

5) Posto

$$a_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{oppure se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

Dire se $\sum_n a_n(x)$ converge in $[0, 1]$, se converge uniformemente in $[0, 1]$, se converge uniformemente su $[0, \frac{1}{6}]$.

6) Calcolare il raggio di convergenza di

$$\sum_n x^{2n} \sin \frac{n\pi}{4}, \quad \sum_n a_n x^n \quad \text{dove } a_n = \sum_{k=1}^n k^7.$$

7) Calcolare la somma di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$