Esercizi n.2

key words: Ripartizione di un rettangolo chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, somma superiore e inferiore relativa a una ripartizione per una funzione limitata, funzione integrabile secondo Riemann su un rettangolo, condizione di integrabilità secondo Riemann, integrabilità delle funzioni continue, formule di riduzione, insiemi misurabili secondo Peano–Jordan, insiemi di misura nulla secondo P.–J., Insiemi con frontiera di misura nulla secondo P.–J., domini normali, integrabilità su un insieme misurabile, baricentro, funzioni generalmente continue, formula del cambiamento di variabili per integrali doppi, coordinate polari, integrali multipli, formule di riduzione per integrali multipli, volume, volume dei solidi di rotazione, cambio di variabili negli integrali multipli, coordinate sferiche.

1) Si calcoli la misura di Peano-Jordan per i seguenti insiemi

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x}\}$,

ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4\}$,

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x + y \leq 2,\ 1 \leq x - y \leq 4\}$.

2) Si calcoli il baricentro di una lastra di spessore costante

i) omogenea e di forma di trapezio rettangolo con angolo alla base di $\pi/3$, base maggiore B e altezza h

ii) di forma di triangolo isoscele di base B e altezza h e densità proporzionale alla distanza dalla base,

iii) omogenea e a forma di una metà di una ellisse di assi a e b.

3) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_E x \cos y \, dx\, dy, \qquad \int_E y\sqrt{1-x^2}\, dx\, dy, \qquad \int_E y e^x \, dx\, dy,$$

dove E è l'intersezione del disco di centro 0 e raggio 1 con il primo quadrante.

4) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_E \frac{x}{1+x+y}\, dx\, dy, \qquad \text{dove} \quad E = \{(x, y) \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\},$$

$$\int_E x^2 + y^2 \, dx\, dy, \qquad \text{dove} \quad E = \{(x, y) \,:\, 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1 - y^2\},$$

$$\int_E x \arcsin y \, dx\, dy, \qquad \text{dove} \quad E = \{(x, y) \,:\, -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

5) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_E \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,1\le x^2+y^2\le 9\},$$

$$\int_E (x+y)\,dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2-2x\le 0\},$$

$$\int_E x^2 e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,x\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\},$$

$$\int_E dx\,dy, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y)\,:\,\frac{1}{2}\le \sin xy\le \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\le xy\le \pi,\ 1\le \frac{x}{y}\le 2\}.$$

6) Si calcoli il volume dei seguenti insiemi

i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{1-x},\ |z|\le 1\}$,

ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 4-x-y\}$,

iii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

7) Si calcoli il volume dei solidi ottenuti facendo ruotare attorno all'asse x le funzioni

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x^2$,

ii) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x^2$,

iii) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$.

8) Si trovi il baricentro di

i) un cono retto omogeneo di altezza h e raggio di base R.

ii) un tronco di paraboloide omogeneo ottenuto facendo ruotare $z=\sqrt{x}$ con $a\le x\le b$,

iii) una semisfera omogenea di raggio R.

9) Si calcoli

$$\int_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\},$$

$$\int_E x^2\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{dove} \quad E=\{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1\}.$$