

### Esercizi n.1

**key words:** continuità di una funzione da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$ , derivata direzionale, derivate parziali, gradiente, differenziabilità, differenziale, piano tangente al grafico, derivate direzionali seconde, matrice hessiana formula di Taylor, forma quadratica definita positiva e negativa, punti di massimo e di minimo e di sella, matrice jacobiana.

1) Trovare il dominio di definizione delle funzioni

$$\sin \frac{x+y}{x-y} - \sqrt{x-y^2}, \quad \sqrt{xy(xy+1)}, \quad \arctan \frac{x}{x^2+y^4}.$$

2) Verificare direttamente la continuità delle funzioni che seguono nei punti indicati, usando la definizione (trovando esplicitamente il rapporto tra  $\varepsilon$  e  $\delta$ )

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+y}}, \quad (0, 2), \quad \frac{x-y}{x+y}, \quad (0, 1).$$

3) Dire se e dove è continua la funzione  $f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{se } y \geq 0, \\ -\log \frac{1+xy}{-y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$

Stessa domanda con la funzione  $g(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{se } y \geq 0, \\ \frac{\log(1+xy)}{y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$

4) Trovare la derivata nella direzione del generico versore  $\underline{v} = (v_1, v_2)$ , nell'origine, per le funzioni

$$x + \sin y, \quad \frac{x}{1+x^4+y^4}, \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 + 5.$$

5) Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$\frac{xy}{x+y}, \quad (x+y^2)e^{x-y}, \quad (\sqrt{x^2+y^2+1}) \log\left(\frac{x-y}{x+y}\right).$$

6) Calcolare il differenziale in  $(0, 0)$  per le funzioni

$$e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \quad \sin(y+x^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2+x+y & \text{se } y \geq 0, \\ x^2+y^2+x+y & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

**7)** Trovare in un generico punto  $(x_0, y_0)$  l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + 1, \quad f(x, y) = \sin(x + y).$$

**8)** Trovare i punti stazionari e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella per le funzioni

$$x^2 + y^3, \quad x^3 + 6xy + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + xyz, \\ x^3 + xy + y^2 + yz + z^2, \quad \sin(x - y) \cos x, \quad (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

**9)** Scrivere la formula di Taylor per la funzione  $e^{x+y^2}$  fino al secondo ordine relativamente al punto  $(1, 1)$ .

**10)** Scrivere la matrice jacobiana nel generico punto  $(x, y)$  per le funzioni

$$(x + xy + xy^2, x + \sin(xy^2)), \quad (x \sin(yz), y \log\left(\frac{x}{z}\right), \sqrt{x + z}).$$

**11)** Supponendo che  $f(t) = \int_a^b F(t, x)dx$  e che  $f'(t) = \int_a^b \partial_x F(t, x)dx$ , si calcoli la derivata della funzione

$$\phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} F(t, x)dx.$$