Esercizi per il test d'ingresso

1. Siano $p(x)$: "x è francese", $q(y)$: "y è italiano" e $r(z)$: "z è biondo". Si interpretino gli enunciati

$$\forall x, p(x) \Longrightarrow r(x), \qquad \forall x, r(x) \wedge \neg p(x) \Longrightarrow q(x)$$

e le rispettive negazioni.

2. Siano $p(x)$: "x è alto", $q(y)$: "y è felice" e $r(z)$: "z è fortunato". Si interpreti l'enunciato

$$\forall x, p(x) \Longrightarrow q(x) \vee r(x)$$

e la sua negazione.

3. Sia $p(x, y)$ il predicato "il ragazzo x osserva la ragazza y". Si interpreti l'enunciato

$$\exists x : \ \forall y, \neg p(x, y)$$

e si esprima in formula e a parole la sua negazione.

4. Si determini la negazione della proposizione

$$\forall x \in A, \ \exists y \in B : \ \forall z \in C, \ zy \geq 1 \Longrightarrow zx \leq 1.$$

5. Si determini la negazione della proposizione

"in ogni classe qualche ragazzo è bello oppure in qualche classe ogni ragazza è simpatica"

6. Si determini la negazione della proposizione

"c'è un luogo d'Italia che ogni italiano conosce e ogni luogo d'Italia è noto a qualche italiano ".

7. Si scriva in luogo di $\ldots$ il simbolo $\in$ oppure $\subseteq$

$$a \ldots \{a\}, \ \{a\} \ldots \{a, b\}, \ a \ldots \{a, \{a\}, b\}, \ \emptyset \ldots \{a\}, \ \{a, b\} \ldots \{b, a\}, \ \emptyset \ldots \emptyset.$$

8. Si scriva in luogo di $\ldots$ il simbolo $\in$ oppure $\subseteq$

$$b \ldots \{a, b\}, \ \{b\} \ldots \{a, b\}, \ \{a\} \ldots \{a, \{a\}, b\}, \ \emptyset \ldots \mathcal{P}(\{a\}), \ \{a, b\} \ldots \{b, a\}, \ \emptyset \ldots \emptyset.$$

9. Si consideri l'insieme $B = \{\emptyset, \{a\}\}$. Si determini $\mathcal{P}(B)$.

10. L'insieme A contiene 5 elementi, l'insieme B contiene 4 elementi e l'insieme C ne contiene 3. Quanti elementi contiene al massimol'insieme $A \cup B \cup C$? E al minimo? Stesse domande sapendo che $A \cap B$ contiene un solo elemento mentre $A \cup C$ ne contiene 6.

11. L'insieme A contiene 4 elementi, l'insieme B contiene 5 elementi e l'insieme C ne contiene 4. Quanti elementi contiene al massimo l'insieme $A \cup B \cup C$? E al minimo? Stesse domande sapendo che $A \cap B$ contiene un solo elemento mentre $A \cup C$ ne contiene 7.

12. Siano A, B, C tre insiemi. Supponiamo $|A| = 7$, $|B| = 5$, $|C| = 6$, $|A \cap B| = 1$, $|A \cap C| = 2$, $|B \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 1$. Quanti elementi contiene l'insieme $A \cup B \cup C$? .

13. Sia A l' insieme $\{a, b, c, d\}$. Si consideri la relazione $\subseteq$ sull'insieme delle parti di A. È riflessiva? È simmetrica? È transitiva? È antisimmetrica? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine? È una relazione d'ordine totale?

14. Sia su $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ la relazione ρ così definita: $(m, n)\rho(m', n')$ significa "$m + n' = m' + n$. Si dica se ρ è riflessiva, simmetrica, antisimmerica, transitiva. ρ è relazione di equivalenza, è relazione d'ordine?

15. Sia su $\mathbf{Q}$ la relazione ρ così definita: $a\rho b$ significa $a - b \in \mathbf{Z}$. Si dica se ρ è riflessiva, simmetrica, antisimmerica, transitiva. ρ è relazione di equivalenza? Se la risposta precedente è affermativa, chi è l'insieme quoziente?

16. Sia su $\mathbf{N}$ la relazione ρ cosìdefinita: $x\rho y$ significa "$x + y$ è pari". Si verifichi che è una relazione di equivalenza e si determini l'insieme quoziente $\mathbf{N}/\rho$.

17. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ si dia un esempio di funzione $f : A \to B$ non suriettiva e un esempio di funzione $g : B \to A$ iniettiva; .

18. Si considerino le funzioni $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto n^2 + 1$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto 3n + 2$. Si derminino $f \circ g$ e $g \circ f$. $f \circ g$ è iniettiva? $g \circ f$ è suriettiva?

19. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ si dia un esempio di funzione $f_1 : A \to B$ non suriettiva e un esempio di funzione $f_2 : A \to B$ suriettiva; un esempio di funzione $g_1 : B \to A$ non iniettiva e un esempio di funzione $g_2 : B \to A$ iniettiva; .

20. Si consideri la funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n^2 + 2n + 3$. Si determinino $f(\{1, 2, 3\})$ e $f^{\leftarrow}(\{1, 2, 3\})$.

21. Si consideri la funzione $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sqrt{|x| + 1}$. Si determinino $h(\{1, 2, 3\})$ e $h^{\leftarrow}(\{1, 2, 3\})$.

22. Si consideri la funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n^2 + n + 1$. Si determinino $f(\{1, 2, 3\})$ e $f^{\leftarrow}(\{1, 2, 3\})$.

23. Si scriva 457_{otto} in base *sette*.

24. Si scriva 565_{sette} in base *otto*.

25. Siano $A = \{n \in \mathbf{N} : \ (\exists m \in \mathbf{N} : n = 3m)\}$ e $B = \{n \in \mathbf{N} : \ (\exists k \in \mathbf{N} : n = 4k + 1)\}$. Si dica se esistono ed eventualmente si determinino il minimo e il massimo di $C = A \cap \mathcal{C}_{\mathbf{N}} B$.

26. Nell'atrio di un condominio vi sono 10 cassette per le lettere. Il postino inserisce 5 volantini tutti tra loro diversi senza badare ad alcuna regola. In quanti modi diversi lo può fare? E se invece osserva la regola di non metter più di un volantino per cassetta? E se osserva la regola la regola di non metter più di un volantino per cassetta ma i volantini sono tutti uguali?

27. Nell'atrio di un condominio vi sono 10 cassette per le lettere. Ad ognuna di queste si vuole assegnare un numero da 1 a 10. In quanti modi diversi lo si può fare? Se ne vogliono dipingere 5 di giallo e 5 di rosso. In quanti modi lo si può fare? E se invece se ne vogliono dipingere 4 di giallo, 4 di rosso e 2 di verde?

28. In una stanza vi sono 25 sedie. Entrano 3 persone. In quanti modi diversi possono prendere posto sulle sedie? Su una scacchiera di 5 righe e 5 colonne si dispongono 3 pedine uguali. Quanti sono i possibili diversi modi di farlo?

29. Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

30. Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 3x = 1.$$

31. Si trovino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy - 1 + 4x = 0 \\ y - 2x = -1. \end{cases}$$

32. Si trovino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 + 4x = 0 \\ y - 2x = -1. \end{cases}$$

33. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2 - 3x}{2x + 1} \geq 0.$$

34. Si disegni sul piano l'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y \geq 2 \vee x - y \leq 2\}$.

35. Si disegni sul piano l'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \geq 4 \vee x - y \leq 1\}$.

36. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2 - 4x}{3x + 1} \geq 0.$$

37. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$\left|x^2 + x\right| \geq x.$$

38. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$x - \sqrt{1 - x^2} < 0.$$

39. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$x + \sqrt{1 + x^2} \geq 0.$$

40. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$\cos 2x + \sin x \cos x \geq 0.$$

41. Si determinino le soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \geq 1.$$