**Esercizi n. 8**

**key words**: Serie di potenze, raggio di convergenza, serie derivata e serie integrale, somma di una serie di potenze, serie di Taylor, funzioni analitiche, funzione esponenziale complessa..

**1)** Si calcoli il raggio di convergenza di

$$\sum_n x^{2n} \sin\frac{n\pi}{4}, \qquad \sum_n a_n x^n \quad \text{dove} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} k^7.$$

**2)** Si calcoli il raggio di convergenza e insieme di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n^2+2)2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^3}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n!}.$$

**3)** Si calcoli la somma di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

**4)** Si scriva lo sviluppo in serie di Taylor, centrato nel punto indicato, di

$$f(x) = \exp\left(1-x^2\right),\ x_0 = 0, \quad g(x) = \frac{1}{2x-3},\ x_0 = 0, \quad h(x) = \log(1+x),\ x_0 = 1.$$

**5)** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{2n}.$$

Detto $E$ l'insieme di convergenza della serie, si consideri la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{2n}.$$

i) Si determini l'insieme di convergenza $E$ della serie.

ii) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$.

iii) Si verifichi che 0 è un punto di massimo relativo per la funzione $f$.

iv) Si calcoli $f(1)$.

**6)** Si considerino le funzioni

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \qquad \mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Se ne scriva lo sviluppo in serie di Taylor, centrato in 0 e si valuti Si(1) e Erf(1) con un errore inferiore a $10^{-3}$.