Esercizi n. 7

key words: successione di funzioni, convergenza puntuale, convergenza uniforme, continuità del limite, teorema dei due limiti, passaggi al limite sotto il segno, serie di funzioni, convergenza totale.

1) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 1 - x & \text{se} \quad \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

2) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{n + x^{2n}} \quad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_n (\sqrt{1 + (nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha}) \quad \text{per} \quad x \in]0. + \infty[.$$

Dire per quali valori di α la convergenza è uniforme.

4) Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$, con

$$n \ge 1, \qquad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + x^2}.$$

(i) Si determini l'insieme sui cui se $(f_n)_n$ è puntualmente convergente e se ne calcoli il limite puntuale.

(ii) Detto f il limite puntuale di $(f_n)_n$, si dica se la successione delle f_n ristrette al dominio $[-1, 1]$ sia uniformemente convergente a f ristretta al medesimo dominio.

(iii) Si provi che $(f_n)_n$ non converge uniformemente a f su tutto l'insieme di convergenza puntuale.

(iv) Si consideri la serie $\sum_n (-1)^n f_n$. Si dica se è convergente su $[-1, 1]$. Si dica se la convergenza è uniforme.

5) Trovare l'insieme di convergenza E delle serie di seguito indicate e dire su quali sottoinsiemi di E c'è convergenza totale

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n|x^2 - x|}}{n \log^2 n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log(\sqrt[n]{1 + \frac{x}{n}}), \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})^{\log n}.$$

6) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n .$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(ii) Relativamente alla serie del punto (i) si provi che la convergenza è uniforme su tutto l'insieme di convergenza.

(iii) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{ax}{1+x^2} \right)^n ,$$

dove il parametro a è un numero reale positivo. Si determinino i valori di a per i quali la serie è convergente uniformemente su $\mathbb{R}$ e in questo caso si calcoli la somma della serie.

7) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n} .$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

(ii) Si osservi che per ogni $x \in E \cap]-\infty, 0[$ la serie verifica le condizioni di Leibniz. Si utilizzi la formula di stima dell'errore per provare che la serie converge uniformemente su $E \cap]-\infty, 0[$.

(iii) Si provi che la serie non converge uniformemente su $E \cap]0, +\infty[$.