

## Esercizi n.5

**key words:** funzioni implicite, teorema del Dini.

1) Si verifichi che data

$$F(x, y) = y + y^4 + x^3 \sqrt{x^2 + 1},$$

l'insieme  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$  intersecato con un opportuno intorno del punto  $(0, 0)$  è il grafico di una funzione  $x \mapsto f(x)$ . Si mostri che  $0$  è punto di estremo locale per  $f$  e se ne determini la natura.

2) Si verifichi che data

$$F(x, y) = e^{\frac{x^2 y}{2}} - \log\left(\frac{2x}{y}\right),$$

l'insieme  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = e\}$  intersecato con un opportuno intorno del punto  $(1, 2)$  è il grafico di una funzione  $x \mapsto f(x)$  e anche di una  $y \mapsto g(y)$ . Si calcolino  $f'(1)$  e  $g'(2)$ .

3) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione definita implicitamente dall'equazione

$$y \cos(xy) + (1 - y^2)(e^x - 1) = 0$$

in un intorno del punto  $(0, 0)$ .

4) Sia  $f(x) = e^x + x^2$ . Si provi che esiste un intorno del punto  $0$  in cui  $f$  è invertibile. Detta  $\phi$  l'inversa di  $f$ , si scriva la formula di Taylor di  $\phi$  fino all'ordine 2 relativamente al punto  $y_0 = 1$ .

5) Sia

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2xy + y^2 = 6\}.$$

- Si provi che  $\Gamma$  è limitato.
- Si determinino i punti di  $\Gamma$  nei pressi dei quali  $\Gamma$  è grafico di una funzione (della  $x$  o della  $y$ ).
- Si determinino i punti di  $\Gamma$  in cui sia massima o minima una delle coordinate.
- Osservato che  $(1, 1)$  è un punto di  $\Gamma$ , si determini la retta tangente a  $\Gamma$  in tale punto.