

Esercizi n.4

key words: derivate direzionali di ordine superiore a 1, matrice hessiana, formula di Taylor, forma quadratica definita positiva e negativa, punti di massimo, di minimo e di sella.

1) Trovare i punti stazionari e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella per le funzioni

$$x^2 + y^3, \quad x^3 + 6xy + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + xyz, \\ x^3 + xy + y^2 + yz + z^2, \quad \sin(x - y) \cos x, \quad (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

2) Scrivere la formula di Taylor per la funzione e^{x+y^2} fino al secondo ordine relativamente al punto $(1, 1)$.

3) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x - y + 1}{x + y + 2}.$$

- Si determini il dominio e il segno della funzione f .
- Si determini l'equazione del piano tangente al grafico della f nel punto $(1, 1, 1/4)$.
- Si scriva la formula di Taylor con resto di Peano di f arrestata al secondo ordine, relativamente al punto $(2, 2)$.
- Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura.
- Si determinino sup e inf per f sul suo dominio.

4) Si considerino le funzioni

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4), \quad g(x, y) = y^2 + x^2y - y.$$

- Si determini il gradiente di f e g .
- Si determini la matrice hessiana di f e g .
- Si determinino gli eventuali punti stazionari di f e g e se ne discuta la natura.
- Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f e g nei punti $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(1, 2)$ rispettivamente.
- Si determinino inf f , sup f , inf g , sup g .