

### Esercizi n.3

**key words:** Derivate direzionali, derivate parziali, funzioni differenziabili, differenziale, piano tangente, punti stazionari, matrice jacobiana, differenziale di funzioni composte.

1) Trovare la derivata nella direzione del generico versore  $\underline{v} = (v_1, v_2)$ , nell'origine, per le funzioni

$$x + \sin y, \quad \frac{x}{1 + x^4 + y^4}, \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 5.$$

2) Trovare la derivata (se esiste) nella direzione del generico elemento  $g$ , nel punto  $f$ , per le funzioni  $\Phi$ ,  $\Psi$  e  $\Xi$  definite su  $C^0([0, 1])$  a valori in  $\mathbb{R}$

$$\Phi(f) = f(1/2), \quad \Psi(f) = \max_{x \in [0, 1]} f(x), \quad \Xi(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

3) Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$\frac{xy}{x + y}, \quad (x + y^2)e^{x-y}, \quad (\sqrt{x^2 + y^2 + 1}) \log\left(\frac{x-y}{x+y}\right).$$

4) Calcolare il differenziale in  $(0, 0)$  per le funzioni

$$e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \quad \sin(y + x^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + x + y & \text{se } y \geq 0, \\ x^2 + y^2 + x + y & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

5) Trovare in un generico punto  $(x_0, y_0)$  l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + 1, \quad f(x, y) = \sin(x + y).$$

6) Scrivere la matrice jacobiana nel generico punto  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$  per le funzioni

$$(x + xy + xy^2, x + \sin(xy^2)), \quad (x \sin(yz), y \log\left(\frac{x}{z}\right), \sqrt{x + z}).$$

7) Supponendo che  $f(t) = \int_a^b F(t, x) dx$  e che  $f'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx$ , si calcoli la derivata della funzione

$$\phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} F(t, x) dx.$$