Esercizi n.2

key words: Spazi normati, norme equivalenti, funzioni lineari e continue tra spazi normati.

1) In $\mathbb{R}^2$ si considerino

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad per \quad p \geq 1, \qquad \|x\|_\infty = \sup\{|x_1|,\ |x_2|\}.$$

a) Si provi che se $p \geq q$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\|x\|_p \leq \|x\|_q$.

b) Si provi che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

2) Sia $(V,\ \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato. Si provi che la funzione norma è continua da V a $\mathbb{R}$.

3) Sia $\mathcal{C}^1([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\ :\ f$ continua con derivata prima continua$\}$. Si considerino

$$\text{a) } p_a(f) = |f(\frac{1}{2})|, \qquad \text{b) } p_b(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad \text{c) } p_c(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt,$$

$$\text{d) } p_d(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, \qquad \text{e) } p_e(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt.$$

Si dica quali tra queste sono norme.

4) Si provi che p_b e p_c dell'esercizio precedente non sono norme equivalenti.

5) Siano V e W due spazi normati. Poniamo

$$L(V,W) = \{\phi : V \to W\ :\ \phi \text{ lineare}\},$$

$$\mathcal{L}(V,W) = \{\psi : V \to W\ :\ \psi \text{ lineare e continua}\}.$$

Si provi che se V e W hanno dimensione finita allora $L(V,W) = \mathcal{L}(V,W)$. Si cerchi un esempio che confermi che in generale $L(V,W) \neq \mathcal{L}(V,W)$.

6) Siano V e W due spazi normati. Si definisca, per $\phi \in \mathcal{L}(V,W)$,

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{v\in V \\ \|v\|_V=1}} \|\phi(v)\|_W.$$

Si provi che $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ è una norma su $\mathcal{L}(V,W)$.