Esercizi n. 10

key words: Equazioni differenziali, soluzioni di equazioni differenziali, problema di Cauchy, soluzioni massimali, lemma di Gronwall, soluzioni definite su domini “tipo striscia”.

1) Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 4tu + t, \\ u(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{u}{t} + t^2 e^t, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u-1}{\sqrt{t}}, \\ u(1) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{t+1}{t} u + t^2, \\ u(1) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = (u-1)\cos t, \\ u(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = u \tan t + \cos t, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

2) Si trovino (tutte) le soluzioni delle seguenti equazioni differeneziali

$$u' = 1 - \frac{u}{t}, \qquad u' = 2tu + u^2,$$

$$u' = \frac{u+t}{u-t}, \qquad u' = \frac{u}{t} + \frac{u^2}{t^2},$$

$$u' = \frac{u}{t} + \frac{u^2}{t}, \qquad u' = u + t\sqrt[3]{u}.$$

3) Indicata con f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2, \\ u(1) = \sqrt[n]{n}, \end{cases}$$

si provi che la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente sul dominio $]-\infty, 1]$.

4) Indicata con f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{n}(t+u), \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

si provi che la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente sul dominio $[0, +\infty[$. Converge anche uniformemente?