Esercizi n.1

key words: Spazi metrici. Distanze topologicamente equivalenti. Successioni in spazi metrici. Continuità negli spazi metrici.

1) Sia $X = [0, 1]$. Si definiscono $d_e(x, y) = |x - y|$ e $d_{\sqrt{}}(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

a) Provare che $d_{\sqrt{}}$ è una distanza su X.

b) Provare che d_e e $d_{\sqrt{}}$ sono topologicamente equivalenti.

c) Provare che non esiste $c > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ valga $c\, d_{\sqrt{}}(x, y) \leq d_e(x, y)$.

2) Sia $\omega : [0, +\infty[\to [0, \infty[$ una funzione continua (rispetto alla usuale topologia) e strettamente crescente. Sia $\omega(0) = 0$ e si supponga che per ogni $a, b \in [0, +\infty[$ si abbia $\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b)$. Si definisca, su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $d_\omega(x, y) = \omega(|x - y|)$.

a) Si provi che d_ω è una distanza su X.

b) Si provi che d_e e d_ω sono topologicamente equivalenti.

3) Rifare l'esercizio precedente sostituendo la condizione "per ogni $a, b \in [0, +\infty[$ si abbia $\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b)$" con la condizione "$\omega$ è concava".

4) Sia (X, d) uno spazio metrico. Si consideri $\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{se } d(x, y) \leq 1, \\ 1 & \text{se } d(x, y) > 1. \end{cases}$

a) Si provi che $\tilde{d}$ è una distanza su X.

b) Si provi che d e $\tilde{d}$ sono topologicamente equivalenti.

5) Rifare l'esercizio precedente ponendo $\tilde{d}(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

6) Sia X un insieme. Si consideri $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$

a) Si provi che d è una distanza su X.

b) Si caratterizzino le successioni convergenti in X rispetto alla metrica d.

7) In (X, d) metrico l'insieme A si dice limitato se esistono $x_0 \in X$ e $M > 0$ tali che per ogni $x \in A$ si abbia $d(x, x_0) \leq M$. Sia $(x_n)_n$ una successione in X. Si provi che

a) se $(x_n)_n$ è convergente allora $\{x_n \in X \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ è limitato;

b) se $(x_n)_n$ è di Cauchy allora $\{x_n \in X \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

8) Sia(X, d) un spazio metrico. Sia $(x_n)_n$ una successione di Cauchy in X e si supponga che $(x_n)_n$ abbia una sottosuccessione convergente a $\bar{x} \in X$. Si provi che la successione $(x_n)_n$ è convergente a $\bar{x}$.

9) Trovare il dominio di definizione delle funzioni

$$\sin\frac{x+y}{x-y} - \sqrt{x-y^2}, \qquad \sqrt{xy(xy+1)}, \qquad \arctan\frac{x}{x^2+y^4}.$$

10) Verificare direttamente la continuità delle funzioni che seguono nei punti indicati, usando la definizione (trovando esplicitamente il rapporto tra ε e δ)

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+y}}, \quad (0,2), \qquad\qquad \frac{x-y}{x+y}, \quad (0,1).$$

11) Dire se e dove sono continue le funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ -\log\dfrac{1+xy}{-y} & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ \dfrac{\log(1+xy)}{y} & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$