Esercizi di calcolo differenziale in più variabili - Soluzioni e commenti

Questo testo è stato redatto dal tutore Alexander Dabrowski per chiarire alcuni degli esercizi assegnati e rispondere alle domande degli studenti che hanno seguito il tutorato del corso di Analisi 3A nell'a.a. 2014-2015 all'Università di Trieste; il corso è stato tenuto dal Prof. Del Santo.

Esercizi n.1

key words: Spazi metrici. Distanze topologicamente equivalenti. Successioni in spazi metrici. Continuità negli spazi metrici.

1) Sia $X = [0, 1]$. Si definiscono $d_e(x, y) = |x - y|$ e $d_{\sqrt{}}(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

a) Provare che $d_{\sqrt{}}$ è una distanza su X.

b) Provare che d_e e $d_{\sqrt{}}$ sono topologicamente equivalenti.

c) Provare che non esiste $c > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ valga $c\, d_{\sqrt{}}(x, y) \leq d_e(x, y)$.

2) Sia $\omega : [0, +\infty[\to [0, \infty[$ una funzione continua (rispetto alla usuale topologia) e strettamente crescente. Sia $\omega(0) = 0$ e si supponga che per ogni $a, b \in [0, +\infty[$ si abbia $\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b)$. Si definisca, su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $d_\omega(x, y) = \omega(|x - y|)$.

a) Si provi che d_ω è una distanza su X.

b) Si provi che d_e e d_ω sono topologicamente equivalenti.

3) Rifare l'esercizio precedente sostituendo la condizione "per ogni $a, b \in [0, +\infty[$ si abbia $\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b)$" con la condizione "$\omega$ è concava".

4) Sia (X, d) uno spazio metrico. Si consideri $\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{se } d(x, y) \leq 1, \\ 1 & \text{se } d(x, y) > 1. \end{cases}$

a) Si provi che $\tilde{d}$ è una distanza su X.

b) Si provi che d e $\tilde{d}$ sono topologicamente equivalenti.

5) Rifare l'esercizio precedente ponendo $\tilde{d}(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

6) Sia X un insieme. Si consideri $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$

a) Si provi che d è una distanza su X.

b) Si caratterizzino le successioni convergenti in X rispetto alla metrica d.

7) In (X, d) metrico l'insieme A si dice limitato se esistono $x_0 \in X$ e $M > 0$ tali che per ogni $x \in A$ si abbia $d(x, x_0) \leq M$. Sia $(x_n)_n$ una successione in X. Si provi che

a) se $(x_n)_n$ è convergente allora $\{x_n \in X \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ è limitato;

b) se $(x_n)_n$ è di Cauchy allora $\{x_n \in X \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

8) Sia(X,d) un spazio metrico. Sia $(x_n)_n$ una successione di Cauchy in X e si supponga che $(x_n)_n$ abbia una sottosuccessione convergente a $\bar{x} \in X$. Si provi che la successione $(x_n)_n$ è convergente a $\bar{x}$.

9) Trovare il dominio di definizione delle funzioni

$$\sin\frac{x+y}{x-y} - \sqrt{x-y^2}, \qquad \sqrt{xy(xy+1)}, \qquad \arctan\frac{x}{x^2+y^4}.$$

10) Verificare direttamente la continuità delle funzioni che seguono nei punti indicati, usando la definizione (trovando esplicitamente il rapporto tra ε e δ)

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+y}}, \quad (0,2), \qquad\qquad \frac{x-y}{x+y}, \quad (0,1).$$

11) Dire se e dove sono continue le funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ -\log\dfrac{1+xy}{-y} & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ \dfrac{\log(1+xy)}{y} & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

SOLUZIONI E COMMENTI
FOGLIO 1

Esercizio 2. b) Sappiamo che d_e, d_ω sono topologicamente equivalenti $\Leftrightarrow$ fissati arbitrari $x_0 \in X$ e $r > 0$, possiamo trovare $r', r'' > 0$ tali che

$$B_e(x_0, r') \subseteq B_\omega(x_0, r) = \big\{x \in X : \omega(|x - x_0|) < r\big\}, \tag{1}$$

$$B_\omega(x_0, r'') \subseteq B_e(x_0, r) = \big\{x \in X : |x - x_0| < r\big\}. \tag{2}$$

Proviamo (1) e (2).
Dalla continuità di ω in 0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; d_\omega(x, x_0) = \omega(|x - x_0|) < r.$$

Preso allora $r' = \delta$ abbiamo (1).
Per l'altra inclusione osserviamo che ω strettamente crescente $\Rightarrow$ esiste l'inversa ω^{-1} ed è ancora strettamente crescente. Allora

$$\omega(|x - x_0|) < \omega(r) \;\Rightarrow\; |x - x_0| = \omega^{-1}(\omega(|x - x_0|)) < \omega^{-1}(\omega(r)) = r;$$

ovvero preso $r'' = \omega(r)$ vale (2).

Un'osservazione finale: si può provare che l'equivalenza topologica delle distanze d_e, d_ω non dipende dalla natura di $X \subseteq \mathbb{R}$ (che ad esempio potrebbe essere indifferentemente $X = [0, 1], \mathbb{R}, \mathbb{N}$, ecc.)*.

Esercizio 3. Innanzitutto una nota sulla definizione di concavità:
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice concava se vale una delle seguenti proprietà, che sono tutte equivalenti:

(1) $\forall t \in [0, 1], \forall x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

(2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali che* $x < y < z$ *vale*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

o equivalentemente, fissato un $x_0 \in \mathbb{R}$, *la funzione*

$$s \mapsto \frac{f(s) - f(x_0)}{s - x_0}$$

è decrescente,

(3) per f differenziabile, f' è decrescente.

Per risolvere l'esercizio, proviamo che richiedendo la condizione di concavità su ω abbiamo automaticamente la subadditività, riconducendoci quindi alle stesse ipotesi dell'esercizio precedente. Più precisamente:
Se $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ è concava e $\omega(0) = 0$ allora ω è subadditiva, ovvero vale $\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b)$.

*Questo deriva dal fatto che la topologia metrica di ω su un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ coincide con la topologia sottospazio su X indotta dalla topologia metrica ω su $\mathbb{R}$.

Per provare questo fatto basta sostituire nella definizione (1) di concavità valori opportuni al posto di x, y, t. Infatti, se sostituiamo $x = a + b, y = 0$ in (1), otteniamo

$$\omega\big(t(a+b)\big) = \omega\big(t(a+b) + (1-t)0\big) \geq t\omega(a+b) + (1-t)\omega(0) \overset{\omega(0)=0}{=} t\omega(a+b).$$

Sostituendo $t = \dfrac{a}{a+b}$ in quest'ultima disuguaglianza abbiamo

$$\omega(a) = \omega\left(\frac{a}{a+b}(a+b)\right) \geq \frac{a}{a+b}\omega(a+b),$$

mentre per $t = \dfrac{b}{a+b}$ abbiamo

$$\omega(b) = \omega\left(\frac{b}{a+b}(a+b)\right) \geq \frac{b}{a+b}\omega(a+b).$$

Sommando queste due ultime disuguaglianze otteniamo quello che volevamo provare, cioè la subadditività

$$\omega(a) + \omega(b) \geq \omega(a+b).$$

Esercizio 5. Le prime due proprietà che $\tilde{d}$ deve soddisfare per essere una distanza seguono immediatamente dal fatto che d è una distanza.

Siano poi $x, y, z \in X$ tutti diversi. Usiamo la notazione (proposta da uno di voi)

$$\begin{aligned} d_1 &:= d(x, y), \\ d_2 &:= d(x, z), \\ d_3 &:= d(z, y). \end{aligned}$$

Proviamo quindi la disuguaglianza triangolare

$$(\star) \qquad \frac{d_1}{1+d_1} \leq \frac{d_2}{1+d_2} + \frac{d_3}{1+d_3}$$

in due modi diversi.

1) (*forza bruta*) Con delle manipolazioni algebriche ci ricondurremo da $(\star)$ a qualcosa che sarà vero grazie alla disuguaglianza triangolare di d.

Moltiplicando a destra e sinistra $(\star)$ per $(1+d_1)(1+d_2)(1+d_3)$ otteniamo

$$d_1(1+d_2)(1+d_3) \leq d_2(1+d_1)(1+d_3) + d_3(1+d_1)(1+d_2),$$

svolgendo le parentesi

$$d_1 + d_1d_3 + d_1d_2 + d_1d_2d_3 \leq d_2 + d_1d_2 + d_2d_3 + d_1d_2d_3 + d_3 + d_1d_3 + d_2d_3 + d_1d_2d_3,$$

e semplificando opportunamente

$$d_1 \leq d_2 + d_2d_3 + d_3 + d_2d_3 + d_1d_2d_3.$$

Ma sappiamo che $d_2d_3 \geq 0$ e che vale la disuguaglianza triangolare per d, ovvero $d_1 \leq d_2 + d_3$, quindi quest'ultima disuguaglianza è vera. Ripercorrendo all'indietro il ragionamento abbiamo provato che per $\tilde{d}$ vale la disuguaglianza triangolare.

2) Sia

$$I(t) := \frac{t}{1+t} : [0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

I è crescente perché

$$I'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \geq 0.$$

È anche subadditiva perché

$$I(a+b) = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = I(a) + I(b).$$

Allora dalla disuguaglianza triangolare per d, ovvero $d_1 \leq d_2 + d_3$, segue che

$$\frac{d_1}{1+d_1} = I(d_1) \overset{I \text{ crescente}}{\leq} I(d_2+d_3) \overset{I \text{ subadditiva}}{\leq} I(d_2) + I(d_3) = \frac{d_2}{1+d_2} + \frac{d_3}{1+d_3}.$$

Esercizio 11. Un concetto basilare dell'Analisi in più variabili (e che rivedrete più volte in diverse salse) è: per come lo si definisce, il limite in un punto x non deve dipendere dal "percorso" con cui ci si avvicina a x. Come conseguenza abbiamo che per provare che il limite di una funzione in x non esiste, basta trovare due percorsi su cui la restrizione della funzione che stiamo considerando assume valori diversi all'avvicinarsi a x; per provare invece che il limite esiste, dobbiamo essere sicuri che su qualunque percorso la restrizione della funzione abbia lo stesso limite.* Affrontiamo questo esercizio tenendo queste idee in mente.

i) $f(x,y)$ è continua per $y \neq 0$ perché localmente composizione di note funzioni continue (in questa caso somme, prodotti, logaritmi). Non è continua su $y = 0$, perché fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, lungo la retta $x = x_0$ abbiamo che

$$\lim_{y \to 0^-} -\log\left(\frac{1+x_0 y}{-y}\right) = -\infty.$$

ii) Per (x,y) nel dominio di definizione e $y \neq 0$, abbiamo che g è continua perché localmente composizione di note funzioni continue.

Per i punti di $y = 0$ la situazione invece è più delicata. Consideriamo una generica successione $(x_n, y_n) \to (x_0, 0)$; mostrando che $g(x_n, y_n) \to x_0$, grazie al teorema-ponte† avremo provato che g è continua in $(x_0, 0)$ (essendo $g(x_0, 0) = x_0$).
Se (x_{n_m}, y_{n_m}) è la sottosuccessione di (x_n, y_n) composta da elementi del semipiano $y \geq 0$, abbiamo, dalla continuità della funzione $x + y$, che $g(x_{n_m}, y_{n_m}) \to x_0$. Ci resta ancora da provare che la sottosuccessione $g(x_{n_k}, y_{n_k})$, data dagli elementi (x_{n_k}, y_{n_k}) nel semipiano $y < 0$, converge anch'essa a x_0.

Poiché

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

abbiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : |t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\log(1+t)}{t} - 1 \right| < \varepsilon.$$

*Effettivamente vale che f è continua in $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \forall \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua con $\gamma(1) = (x_0, y_0)$, $f \circ \gamma$ è continua in 1. (È una conseguenza immediata del teorema-ponte).

†Per teorema-ponte s'intende: $\lim_{x \to x_0} f = L \Leftrightarrow \forall$ successione x_n t.c. $x_n \to x_0$, vale $f(x_n) \to L$.

In particolare, posto $t = x_{n_k} y_{n_k}$, per k abbastanza grande otteniamo

$$\left| \frac{\log\left(1 + x_{n_k} y_{n_k}\right)}{x_{n_k} y_{n_k}} - 1 \right| < \varepsilon,$$

e moltiplicando per $|x_{n_k}|$ e svolgendo il valore assoluto otteniamo

$$x_0 - \varepsilon|x_0| \;\leftarrow\; x_{n_k} - \varepsilon|x_{n_k}| < \frac{\log\left(1 + x_{n_k} y_{n_k}\right)}{y_{n_k}} < x_{n_k} + \varepsilon|x_{n_k}| \;\rightarrow\; x_0 + \varepsilon|x_0|.$$

Dall'arbitrarietà di ε abbiamo in conclusione che $g(x_{n_k}, y_{n_k}) \to x_0$.

iii) Un approccio generale utile per calcolare il limite in un punto, e che si adatta bene al calcolo di

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y),$$

è passare alle coordinate polari e provare che il limite non dipende dall'angolo. Più precisamente vale il seguente risultato:*

Sia $f : U \to \mathbb{R}$ *una funzione definita su* U*, un intorno di* $(0,0)$ *a cui è stato tolto al più* $(0,0)$*. Risulta*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$

se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

(a) $\forall \theta_0 \in [0, 2\pi]$*, esiste il limite*

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$$

ed è proprio L,

(b) la convergenza è uniforme rispetto a θ*, ovvero* $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ *tale che* $\forall r \in (0, R), \forall \theta_0 \in [0, 2\pi]$ *vale*

$$|f(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0) - L| < \varepsilon.$$

Applichiamo quindi questo risultato per provare la continuità di h in 0. Fissato $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ abbiamo

$$\lim_{r\to 0} h(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0) = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^2\theta_0 \sin^2\theta_0 = 0.$$

Poiché $|r^2 \cos^2\theta_0 \sin^2\theta_0| \leq r^2$, abbiamo convergenza uniforme rispetto a θ, e quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$.

*È facile da provare come esercizio (segue subito dalla definizione di limite).

Esercizi n.2

key words: Spazi normati, norme equivalenti, funzioni lineari e continue tra spazi normati.

1) In $\mathbb{R}^2$ si considerino

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad per \quad p \geq 1, \qquad \|x\|_\infty = \sup \{|x_1|,\ |x_2|\}.$$

a) Si provi che se $p \geq q$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\|x\|_p \leq \|x\|_q$.

b) Si provi che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

2) Sia $(V,\ \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato. Si provi che la funzione norma è continua da V a $\mathbb{R}$.

3) Sia $\mathcal{C}^1([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f$ continua con derivata prima continua$\}$. Si considerino

a) $p_a(f) = |f(\frac{1}{2})|$, b) $p_b(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, c) $p_c(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$,

d) $p_d(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$, e) $p_e(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt$.

Si dica quali tra queste sono norme.

4) Si provi che p_b e p_c dell'esercizio precedente non sono norme equivalenti.

5) Siano V e W due spazi normati. Poniamo

$$L(V,W) = \{\phi : V \to W \ : \ \phi \text{ lineare}\},$$

$$\mathcal{L}(V,W) = \{\psi : V \to W \ : \ \psi \text{ lineare e continua}\}.$$

Si provi che se V e W hanno dimensione finita allora $L(V,W) = \mathcal{L}(V,W)$. Si cerchi un esempio che confermi che in generale $L(V,W) \neq \mathcal{L}(V,W)$.

6) Siano V e W due spazi normati. Si definisca, per $\phi \in \mathcal{L}(V,W)$,

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} \|\phi(v)\|_W.$$

Si provi che $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ è una norma su $\mathcal{L}(V,W)$.

SOLUZIONI E COMMENTI
FOGLIO 2

Esercizio 4. Supponiamo per assurdo che esista una costante $L > 0$ tale che

$$p_b(f) \leq L p_c(f), \quad \forall f \in C^1([0,1]).$$

Se consideriamo la successione

$$f_n(x) := x^n \in C^1([0,1]),$$

dovremmo avere

$$1 = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| \leq L \int_0^1 x^n = \frac{L}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma

$$\frac{L}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

e quindi non potrebbe essere ≥ 1 per ogni $n \in \mathbb{N}$, un assurdo.

Esercizio 5. Ci servono dei noti risultati preliminari:[*]

- *Tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti,*
- *Ogni spazio normato finito dimensionale è isomorfo a $\mathbb{R}^n$,*
- *Una funzione lineare tra spazi normati è continua se e solo se è limitata.*

Da questi risultati, per risolvere la prima parte dell'esercizio è sufficiente provare che una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è limitata rispetto a una norma qualunque. Questo è vero, infatti: considerata la base standard $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ di $\mathbb{R}^n$, definito

$$M := \max\{\|L(\boldsymbol{e}_1)\|, \ldots, \|L(\boldsymbol{e}_n)\|\},$$

e preso un arbitrario

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n,$$

abbiamo immediatamente la limitatezza di L, ovvero

$$\|L(\boldsymbol{x})\| = \|L(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n)\| \leq |x_1|\|L(\boldsymbol{e}_1)\| + \cdots + |x_n|\|L(\boldsymbol{e}_n)\| \leq M\|\boldsymbol{x}\|_1$$

(dove per comodità, visto che su $\mathbb{R}^m$ tutte le norme sono equivalenti, abbiamo usato la norma 1, cioè $\|\boldsymbol{x}\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$).

Per concludere l'esercizio: riuscite a trovare un esempio di mappa lineare tra spazi normati che non sia limitata o, equivalentemente, che non sia continua?

[*]Nel caso vorreste darci un'occhiata, potete trovare delle dimostrazioni di questi fatti, ad esempio, in `http://users.mat.unimi.it/users/libor/AnConvessa/findim_nls.pdf`

Esercizi n.3

key words: Derivate direzionali, derivate parziali, funzioni differenziabili, differenziale, piano tangente, punti stazionari, matrice jacobiana, differenziale di funzioni composte.

1) Trovare la derivata nella direzione del generico versore $\underline{v} = (v_1, v_2)$, nell'origine, per le funzioni

$$x + \sin y, \qquad \frac{x}{1 + x^4 + y^4}, \qquad (x+1)^2 + (y+1)^2 + 5.$$

2) Trovare la derivata (se esiste) nella direzione del generico elemento g, nel punto f, per le funzioni Φ, Ψ e Ξ definite su $\mathcal{C}^0([0,1])$ a valori in $\mathbb{R}$

$$\Phi(f) = f(1/2), \qquad \Psi(f) = \max_{x\in[0,1]} f(x), \qquad \Xi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

3) Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$\frac{xy}{x+y}, \qquad (x+y^2)e^{x-y}, \qquad (\sqrt{x^2+y^2+1})\log(\frac{x-y}{x+y}).$$

4) Calcolare il differenziale in $(0,0)$ per le funzioni

$$e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \qquad \sin(y+x^2), \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2+x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ x^2+y^2+x+y & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

5) Trovare in un generico punto (x_0, y_0) l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = x^2+y^2+x+y+1, \qquad f(x,y) = \sin(x+y).$$

6) Scrivere la matrice jacobiana nel generico punto (x,y) o (x,y,z) per le funzioni

$$(x+xy+xy^2, x+\sin(xy^2)), \qquad (x\sin(yz), y\log(\frac{x}{z}), \sqrt{x+z}).$$

7) Supponendo che $f(t) = \int_a^b F(t,x)dx$ e che $f'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx$, si calcoli la derivata della funzione

$$\phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} F(t,x)dx.$$

SOLUZIONI E COMMENTI
FOGLIO 3

Esercizio 2. b) Un insieme che gioca un ruolo centrale in questo esercizio è

$$M_f := \big\{x \in [0,1] : f(x) = \psi(f)\big\}.$$

Si tratta ora di calcolare, sempre che esista, il limite

$$\frac{\partial \psi}{\partial g}(f) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(f+tg) - \psi(f)}{t}.$$

Con alcuni esempi si può notare che quando $\max g \neq \min g$ il limite destro e sinistro non sembrano convergere allo stesso valore; analizzando la situazione più a fondo, si può azzardare l'ipotesi che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\psi(f+tg) - \psi(f)}{t} = \max_{M_f} g, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\psi(f+tg) - \psi(f)}{t} = \min_{M_f} g. \tag{2}$$

Prima di provare che effettivamente valgono questi limiti, osserviamo che è sufficiente provare (1), poiché allora

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\psi(f+tg) - \psi(f)}{t} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\psi(f-sg) - \psi(f)}{-s} = -\max_{M_f}(-g) = \min_{M_f} g.$$

Dimostriamo* quindi che vale (1) considerando una arbitraria successione $(t_n)_n$ t.c. $t_n \to 0$ e provando che $\forall n \in \mathbb{N}$ valgono le due disuguaglianze

$$\frac{\psi(f+t_n g) - \psi(f)}{t_n} \geq \max_{M_f} g, \tag{3}$$

$$\frac{\psi(f+t_n g) - \psi(f)}{t_n} \leq \max_{M_f} g + \varepsilon_n, \quad \text{con } \varepsilon_n \to 0. \tag{4}$$

Dim. Per provare (3), basta prendere $x \in M_f$ t.c. $g(x) = \max_{M_f} g$ e osservare che

$$\frac{\psi(f+t_n g) - \psi(f)}{t_n} \overset{\psi=\max}{\geq} \frac{(f+t_n g)(x) - \psi(f)}{t_n} \overset{\psi(f)=f(x)}{=} g(x) = \max_{M_f} g.$$

Per provare (4) abbiamo bisogno di un ε_n di spazio in più. Sia x_n t.c.

$$f(x_n) + t_n g(x_n) = \psi(f + t_n g), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che $\psi(f + t_n g) \to \psi(f)$ e che, poiché g è limitata,

$$t_n g(x_n) \to 0;$$

allora $f(x_n) \to \psi(f)$, e dalla compattezza di M_f, eventualmente passando a una sottosuccessione,

$$\exists x \in M_f : x_n \to x.$$

*La dimostrazione qui riportata è una rielaborazione delle idee contenute in `math.stackexchange.com/questions/703464/directional-derivatives-of-f-mapsto-max-f`, dove la differenza principale è l'approccio per provare (4).

Se ora $g(x) = \max_{M_f} g$ abbiamo finito perché

$$\frac{\psi(f+t_n g)-\psi(f)}{t_n} = \frac{t_n g(x_n) + (f(x_n)-\psi(f))}{t_n} \overset{\psi(f)\geq f(x_n)}{\leq} g(x_n) \leq \varepsilon_n + \max_{M_f} g,$$

per una certa successione $\varepsilon_n \to 0$ (derivante dal fatto che $g(x_n) \to \max_{M_f} g$). Se invece avessimo che $g(x) \neq \max_{M_f} g$, esisterebbe una costante $c > 0$ t.c.

$$g(x_n) \leq \max_{M_f} g - c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\frac{\psi(f+t_n g)-\psi(f)}{t_n} \leq g(x_n) \leq \max_{M_f} g - c,$$

assurdo perché contraddirebbe la precedente stima (3).

$\square$

Esercizi n.5

key words: funzioni implicite, teorema del Dini.

1) Si verifichi che data

$$F(x,y) = y + y^4 + x^3\sqrt{x^2+1},$$

l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, F(x,y) = 0\}$ intersecato con un opportuno intorno del punto $(0,0)$ è il grafico di una funzione $x \mapsto f(x)$. Si mostri che 0 è punto di estremo locale per f e se ne determini la natura.

2) Si verifichi che data

$$F(x,y) = e^{\frac{x^2 y}{2}} - \log(\frac{2x}{y}),$$

l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, F(x,y) = e\}$ intersecato con un opportuno intorno del punto $(1,2)$ è il grafico di una funzione $x \mapsto f(x)$ e anche di una $y \mapsto g(y)$. Si calcolino $f'(1)$ e $g'(2)$.

3) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione definita implicitamente dall'equazione

$$y\cos(xy) + (1-y^2)(e^x - 1) = 0$$

in un intorno del punto $(0,0)$.

4) Sia $f(x) = e^x + x^2$. Si provi che esiste un intorno del punto 0 in cui f è invertibile. Detta ϕ l'inversa di f, si scriva la formula di Taylor di ϕ fino all'ordine 2 relativamente al punto $y_0 = 1$.

5) Sia

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3x^2 + 2xy + y^2 = 6\}.$$

- Si provi che Γ è limitato.
- Si determinino i punti di Γ nei pressi dei quali Γ è grafico di una funzione (della x o della y).
- Si determinino i punti di Γ in cui sia massima o minima una delle coordinate.
- Osservato che $(1,1)$ è un punto di Γ, si determini la retta tangente a Γ in tale punto.

SOLUZIONI E COMMENTI
FOGLIO 5

Gli esercizi di questo foglio ruotano attorno a questo risultato fondamentale:

Teorema (del Dini). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $F \in C^1(U, \mathbb{R})$, $Z_F := F^{-1}(0)$, $(x_0, y_0) \in Z_F$. Se $\partial_x F(x_0, y_0) \neq 0$ allora $\exists V$ intorno di x_0, W intorno di y_0, e $f : V \to W$ t.c.*

$$Z_F \cap (V \times W) = \big\{(t, f(t)) : t \in V\big\}.$$

Inoltre $f \in C^1$ e

$$f'(t) = -\frac{\partial_x F(t, f(t))}{\partial_y F(t, f(t))}.$$

Prima di passare agli esercizi un'osservazione importante:

• il teorema del Dini non dà alcuna condizione necessaria, ovvero possono esserci funzioni esplicitabili rispetto ad altre variabili, anche globalmente, che hanno gradiente nullo. Un esempio immediato di questo comportamento si può ottenere considerando

$$F(x, y) = (y - f(x))^2$$

dove $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ad esempio $f(x) = e^x + x^2$); infatti $\nabla F|_{Z_F} \equiv 0$, nonostante

$$Z_F = \{(t, f(t)) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 1. Iniziamo verificando le ipotesi del teorema del Dini. Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\partial_x F(x, y) = \frac{x^2(3 + 4x^2)}{\sqrt{1 + x^2}},$$
$$\partial_y F(x, y) = 4y^3 + 1,$$

quindi $\partial_y F(0, 0) = 1 \neq 0$ e per il teorema del Dini $\exists U, V$ intorni di 0, e $f : U \to V$ il cui grafico è proprio $\Gamma \cap (U \times V)$.

Controlliamo che 0 sia un punto critico per f: infatti vale

$$(\clubsuit) \qquad f'(t)|_{t=0} = -\frac{\partial_x F|_{(t,f(t))}}{\partial_y F|_{(t,f(t))}}\Big|_{t=0} = t^2(\dots)|_{t=0} = 0.$$

Per determinare la natura di 0, ovvero se è minimo, massimo o flesso, possiamo seguire diverse strade.

(1) (*Derivate successive*). Uno degli approcci più naturali è derivare f finché non si ottiene un valore non nullo, poi usare il seguente risultato:

Lemma. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile almeno n volte e*

$$f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Se n è dispari allora c è un punto di flesso[*]. *Se n è pari e $f^{(n)}(c) > 0$ / $f^{(n)}(c) < 0$ allora c è rispettivamente minimo/massimo locale.*[†]

La determinazione di punti critici attraverso derivate successive è uno strumento molto potente, capace di escludere con una formulazione semplice casi patologi che con altre tecniche vanno trattati più da vicino e con più fatica (v. per esempio il punto (3) più sotto per un esempio concreto).

La derivazione è comunque uno strumento malleabile, che ci permette di seguire ancora approcci diversi:

(a) (*Calcoli fino alla sfinimento).* Si usa la formula per f' dal teorema del Dini sostituendo le relative espressioni e derivando esplicitamente fino a quando non si ottiene qualcosa di non nullo. Per la natura di F possiamo intuire che questa strada porterà a fare molti conti; cerchiamo una via un po' più abbordabile.

(b) (*Calcoli un po' più furbi*). Uno strumento spesso utile per evitare di svolgere conti espliciti è la *regola della catena*: date $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ allora

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt}(t_0) = \nabla F|_{\gamma(t_0)} \cdot \gamma'(t_0) = \partial_x F|_{\gamma(t_0)}\gamma_1'(t_0) + \partial_y F|_{\gamma(t_0)}\gamma_2'(t_0).$$

Scrivendo, per brevità,

$$F_i := \partial_{x_i} F|_{(t,f(t))},$$
$$F_{ij} := \partial^2_{x_i x_j} F|_{(t,f(t))},$$

applichiamo la regola della catena per calcolare la derivata seconda di f:

$$f''(t) = -\frac{d}{dt}\frac{F_1}{F_2} = -\frac{\left(\frac{d}{dt}F_1\right)F_2 - F_1\left(\frac{d}{dt}F_2\right)}{\left(F_2\right)^2} =$$
$$-\frac{\left(F_{11} + F_{12}f'(t)\right)F_2 - F_1\left(F_{21} + F_{22}f'(t)\right)}{\left(F_2\right)^2}.$$

[‡]Sappiamo già che $\partial_x F(0,0) = f'(0) = 0$; inoltre dalla forma di $\partial_x F(x,y)$, possiamo dedurre che anche $\partial^2_{xx} F(x,y)$ sarà della forma $x(\dots)$, e quindi $\partial^2_{xx} F(0,0) = 0$. Sostituendo questi valori nell'espressione di $f''(t)$ otteniamo che $f''(0) = 0$.

---

[*]In geometria differenziale, x_0 è un punto di flesso per la curva $y = f(x)$ (che supponiamo differenziabile almeno due volte), se la curvatura

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

cambia segno in x_0; ovvero se

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x_s \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \forall x_d \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{ vale } f''(x_s) f''(x_d) < 0.$$

[†]Si può dimostrare usando Taylor.

[‡]Sostituendo ora l'espressione di f' dal teorema del Dini, ovvero $f'(t) = -\dfrac{F_1}{F_2}$, e svolgendo i conti possiamo ottenere una formula generale per la derivata seconda di una funzione implicita:

$$f''(t) = -\frac{\left(F_2\right)^2 F_{11} - 2F_1F_2F_{12} + \left(F_1\right)^2 F_{22}}{\left(F_2\right)^3}.$$

Dobbiamo quindi calcolare la derivata terza di f. Questa tuttavia è un'operazione ancora più laboriosa; in effetti, osservando un po' più accuratamente l'espressione di $\partial_x F(x, y)$ possiamo ridurci a un caso in cui praticamente non calcoliamo alcuna derivata:

(c) (*Calcoli furbissimi*). Definiamo

$$u(t) := -\frac{3 + 4t^2}{(1 + 4f(t)^3)\sqrt{1 + t^2}}$$

(si noti che u è proprio $(\dots)$ nell'espressione di f' in ($\clubsuit$)). Otteniamo allora che

$$f''(t)|_{t=0} = \frac{df'(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \big(2tu(t) + t^2u'(t)\big)\Big|_{t=0} = 0.$$

Passando alla derivata terza otteniamo

$$f'''(t)|_{t=0} = \big(2u(t) + 4tu'(t) + t^2u''(t)\big)\Big|_{t=0} = 2u(0) = -6 \neq 0,$$

e quindi dal lemma precedente abbiamo che 0 è punto di flesso.

(2) Sappiamo che

$$f'(t) = -\frac{\partial_x F|_{(t,f(t))}}{\partial_x F|_{(t,f(t))}} = -\frac{t^2(3 + 4t^2)}{(1 + 4f(t)^3)\sqrt{1 + t^2}}.$$

Dalla continuità di f abbiamo che in un intorno A abbastanza piccolo di 0 vale $1 + 4f(t)^3 > 0$, ovvero

$$f'(t) < 0, \forall t \in A \setminus 0.$$

Intuitivamente, dal fatto che f è strettamente decrescente in A e che ha tangente orizzontale in 0, 0 sarà un punto di flesso. Non è difficile provare quest'idea rigorosamente.[*]

(3) Supponiamo di aver provato che in ogni intorno di 0 la nostra funzione f assume sia valori negativi che positivi. Se $f'(0) = 0$, questo è sufficiente per provare che 0 è un punto di flesso?
Potrebbe accadere che la funzione oscilli tra valori negativi e positivi senza che ci sia mai un intorno di 0 in cui il segno si stabilizza. Effettivamente una funzione, anche estremamente liscia, può oscillare infinite volte in un intervallo compatto; questo è il caso di

$$g(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2}\sin(1/t) & \text{se } t \neq 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

che nonostante abbia tutte le derivate nulle in 0, oscilla infinite volte tra valori negativi e positivi in ogni intorno di 0.[†] Non è difficile provare però che, imponendo una limitazione su quanto la funzione possa oscillare, ad

---

[*]Ad esempio, da un risultato già citato, abbiamo che $f'' > 0$ in un intervallo, ovvero è strettamente concava, se e solo se f' è strettamente crescente; sapendo allora che $f' < 0$ in un intorno sinistro di 0 e $f'(0) = 0$, dalla continuità di f' deve esistere un intervallo $(t_0, 0)$ in cui f' è strettamente crescente, ovvero in cui $f'' > 0$. Con lo stesso ragionamento si può provare l'esistenza di un intervallo destro in cui $f'' < 0$; quindi 0 è un punto di flesso.

[†]Si noti che questo caso patologico, essendo tutte le derivate nulle in 0, è escluso dalle ipotesi del lemma precedente.

esempio richiedendo che la derivata seconda abbia un numero finito di zeri, 0 è un punto di flesso.*

*Infatti se f'' ha un numero finito di zeri ed è continua, esiste un intorno A di 0 t.c. f'' in $A \setminus 0$ non è mai nulla.

Esercizi n.6

key words: Minimi e massimi liberi e vincolati. Vincolo in forma implicita ed esplicita. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

1) Si consideri la funzione $f(x,y) = y^2 + x^2y - y$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta al disco unitario

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2) Si consideri la funzione $f(x,y,z) = xy + xz + y^2$.

i) Si trovino i punti stazionari e si decida se sono massimi, minimi o di sella.

ii) Si determinino gli estremi di f sull'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

3) Si consideri la funzione $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$

4) Si consideri la funzione $f(x,y) = e^{xy}$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 3\}.$$

5) Si consideri la funzione $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

6) Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2 + \cos y$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10\}.$$

7) Si consideri la funzione $f(x,y,z) = \dfrac{y^2 - z^2}{1 + x^2}$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

SOLUZIONI E COMMENTI
FOGLIO 6

Osservazione importante. Sappiamo che se $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ha un massimo/minimo locale in x_0 allora $\mathrm{Hess}\,|_{x_0} f$ è semidefinita negativa/positiva. Tuttavia **non è vero il viceversa**, come il seguente esempio dimostra:

sia

$$f(x, y) := x^2 - y^4.$$

Allora

$$\nabla|_{(0,0)} f = (2x, -4y^3)|_{(0,0)} = (0, 0),$$

$$\mathrm{Hess}\,|_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero l'origine è un punto critico in cui l'hessiana è semidefinita positiva. Tuttavia **non** è un minimo locale perché

$$f(0, y) = -y^4 < 0 = f(0, 0), \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

Se vogliamo provare che un punto critico è massimo/minimo locale usando il criterio dell'hessiana, dobbiamo essere sicuri che sia strettamente definita negativa/positiva.

Esercizio 2.

i) I punti critici sono dati da

$$\nabla f = (y + z, x + 2y, x) = 0,$$

ovvero soltanto l'origine. L'hessiana è

$$\mathrm{Hess}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono le radici del polinomio caratteristico

$$p(-\lambda) = \det(A + \lambda I)^* = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 2,$$

che sappiamo essere tutte reali perché l'hessiana è simmetrica. Dal fatto che $\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = \infty, \lim_{\lambda \to \infty} p(\lambda) = -\infty$, e che esistono

$$x < 0 < y \text{ t.c. } f(x) < 0 < f(y),^\dagger$$

abbiamo dal teorema degli zeri che esistono almeno una radice negativa e una positiva di p. Quindi l'hessiana è indefinita e di conseguenza l'origine è un punto di sella.

*Si noti che le radici del polinomio $\det(A + xI)$ con segno scambiato sono le radici di $\det(A - xI)$; quindi allo scopo di determinare se esistono sia autovalori negativi che positivi, è equivalente usare $\det(A + xI)$ o $\det(A - xI)$.

†Si possono prendere ad esempio $x = -1, y = 2$, o cercare i massimi e minimi di p derivando.

ii) Calcoliamo prima di tutto gli estremi di f ristretta al piano $x+y+z=1$ usando i moltiplicatori di Lagrange, ovvero cerchiamo i punti critici della lagrangiana

$$\mathscr{L}(x,y,z,\lambda) = xy + xz + y^2 - \lambda(x+y+z-1).$$

Si tratta quindi di trovare i punti per cui $\nabla\mathscr{L}(x,y,z,\lambda)=0$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} \partial_x\mathscr{L} = y+z-\lambda = 0 \\ \partial_y\mathscr{L} = x+2y-\lambda = 0 \\ \partial_z\mathscr{L} = x-\lambda = 0 \\ -\partial_\lambda\mathscr{L} = x+y+z-1 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione

$$r_1 := \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Ora non abbiamo ancora finito, perchè il nostro vincolo E è in realtà un triangolo T sul piano $x+y+z=1$ di lati

$$y+z=1, \quad x+z=1, \quad x+y=1,$$

e quindi dobbiamo controllare che f non assuma valori più grandi o più piccoli di $f(1/2,0,1/2)$ anche sul bordo di T. Un modo per fare ciò è utilizzare di nuovo i moltiplicatori di Lagrange*, stavolta per f ristretta al piano $x+y+z=1$, ovvero (esplicitando ad esempio $z=1-x-y$) per

$$\tilde{f}(x,y) := xy + x(1-x-y) + y^2 = x - x^2 + y^2,$$

con i vincoli, da considerare ciascuno separatamente,†

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &:= y + (1-x-y) - 1 = -x, \\ g_2(x,y) &:= x + (1-x-y) - 1 = -y, \\ g_3(x,y) &:= x+y-1. \end{aligned}$$

Per il primo vincolo la lagrangiana diventa

$$\tilde{\mathscr{L}_1}(x,y,\lambda) = \tilde{f}(x,y) - \lambda g_1(x,y) = x - x^2 + y^2 + \lambda x,$$

e imponendo $\nabla\tilde{\mathscr{L}_1} = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x\tilde{\mathscr{L}_1} = 1-2x+\lambda = 0 \\ \partial_y\tilde{\mathscr{L}_1} = 2y = 0 \\ \partial_\lambda\tilde{\mathscr{L}_1} = x = 0 \end{cases}$$

*Per completezza e per chiarire i dubbi sull'uso dei moltiplicatori di Lagrange vi propongo questa strada, anche se non è la più breve.

†Qui prendiamo una breve scorciatoia visto che il vincolo $x+y+z=1$ è esplicitabile senza problemi in una delle variabili; il metodo dei moltiplicatori 'puro' prevede che definito

$$\tilde{\mathscr{L}_i}(x,y,z,\lambda,\tilde{\lambda}) := f - \lambda g - \tilde{\lambda} g_i$$

se ne cerchino i punti critici. Ma dalla condizione

$$\partial_\lambda g = x+y+z-1 = 0,$$

potremmo immediatamente esplicitare una delle variabili, come abbiamo già fatto in anticipo. Una strategia per risparmiare qualche conto quindi potrebbe essere: se si è sicuri di poter esplicitare una delle variabili rispetto alle altre in un vincolo, vale la pena farlo subito.

che ha come unica soluzione $\tilde{r}_2 := (0,0)$. Per il secondo vincolo la lagrangiana diventa

$$\tilde{\mathscr{L}}_2(x,y,\lambda) = x - x^2 + y^2 + \lambda y,$$

che con dei calcoli elementari si prova avere un punto critico in $\tilde{r}_3 := (1/2, 0)$. Per il terzo vincolo invece, la lagrangiana diventa

$$\tilde{\mathscr{L}}_3(x,y,\lambda) = x - x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1),$$

e stavolta risolvendo il sistema dato da $\nabla\tilde{\mathscr{L}}_3 = 0$ non troviamo alcun punto critico. Si osservi però che i vincoli $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ sono delle rette su cui i lati del triangolo T giacciono; ovvero dobbiamo escludere gli eventuali punti trovati che non stanno nei segmenti (nessuno, nel nostro caso) e ancora controllare il valore di f sugli estremi dei segmenti, ovvero in $r_4 := (1,0,0), r_5 := (0,1,0), r_6 := (0,0,1)$.
In conclusione un calcolo esplicito del valore che f assume in r_1, r_5, r_6 e che $\tilde{f}$ assume in $\tilde{r}_2, \tilde{r}_3 = (1/2, 0)^*$ rivela che il massimo di f su E è 1 mentre il minimo è 0.

I moltiplicatori di Lagrange sono una "macchina infallibile", ma a volte, come abbiamo visto nel precedente esercizio, comportano molti conti. Se si riesce a trovare subito una strada più breve per risolvere un problema (e di cui sappiamo giustificare la correttezza), spesso vale la pena percorrerla. Questo è il caso della soluzione proposta per il prossimo esercizio.

Esercizio 5. Dalla non negatività di $x \mapsto x^2$ e $x \mapsto e^x$ sappiamo che $f(x,y) \geq 0, \forall x, y$. Ma $f(0,0,0) = 0$, quindi sappiamo da subito che il minimo di f su M è 0.
Cerchiamo ora il massimo di f. Dal fatto che $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$ otteniamo

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \leq x^2 + y^2,$$

che possiamo usare nel nostro caso per stimare

$$z^2 e^{xy} \leq z^2 e^{x^2+y^2} \overset{\text{vincolo } M}{\leq} z^2 e^{1-z^2}.$$

Ora il massimo di $z \mapsto z^2 e^{1-z^2}$ è $1^\dagger$ e $f(0,0,1) = 1$, quindi il massimo di f ristretta a E è proprio 1.

In mancanza di altre idee spesso però è più veloce e più chiaro usare i moltiplicatori di Lagrange fino in fondo.

Esercizio 6. I punti critici vincolati di f a E saranno i punti critici liberi di

$$\mathscr{L} := x^2 + \cos(y) - \lambda(x^2 + y^2 + e^{z^2} - 10).$$

*che in termini di f è il punto, già trovato prima, $r_1 = (1/2, 0, 1/2)$.

†Infatti la derivata di $z^2 e^{1-z^2}$ è

$$2ze^{1-z^2} - 2z^3 e^{1-z^2} = 2ze^{1-z^2}(1 - z^2),$$

che ha zeri in $0, \pm 1$. Guardando i segni o calcolando la derivata seconda si prova che la funzione ha massimo 1 assunto in ± 1.

Risolviamo il sistema $\nabla \mathscr{L} = 0$, ovvero

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -\sin y - 2\lambda y = 0 \\ -2z\lambda e^{z^2} = 0 \\ x^2 + y^2 + e^{z^2} - 10 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione otteniamo due casi:

- $z = 0$. Dalla prima equazione distinguiamo ancora due casi:
  - $x = 0 \rightsquigarrow$ dalla quarta equazione $y = \pm 3$. Siano quindi $\alpha_{1,2} := (0, \pm 3, 0)$.
  - $\lambda = 1 \rightsquigarrow$ dalla seconda equazione $\sin y = -2y \rightsquigarrow y = 0$ e dalla quarta $x = \pm 3$. Siano $\beta_{1,2} := (\pm 3, 0, 0)$.
- $\lambda = 0 \rightsquigarrow$ dalla prima equazione $x = 0$. Dalla quarta equazione abbiamo che $y^2 \leq 9 \rightsquigarrow |y| \leq 3$, e della seconda equazione dev'essere $y = 0$; dalla quarta equazione otteniamo $z = \pm\sqrt{\log 10}$. Siano quindi $\gamma_{1,2} := (0, 0, \pm\sqrt{\log 10})$.

Controllando infine il valore che f assume in $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ per un solo i (si può considerare un i qualunque poichè $f(x, y) = f(\pm x, \pm y)$) troviamo che f ristretta a E ha massimo 10 e minimo $\cos(3) = \cos(-3)$.

Come vedremo nel prossimo esercizio, un cambio di coordinate furbo spesso può semplificare i conti.

Esercizio 7. Per trovare i punti critici interni si risolve il sistema $\nabla f = 0$; svolgendo i conti si ottiene la retta $y = z = 0$ su cui $f \equiv 0$.

Vediamo ora cosa succede sul bordo di E. Si noti che il vincolo presenta una evidente simmetria sferica. Scegliamo delle coordinate sferiche in modo che l'espressione di f vincolata a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ sia il più semplice possibile, ovvero

$$\begin{cases} x = 3\cos\phi \\ y = 3\sin\phi\cos\theta \\ z = 3\sin\phi\sin\theta \end{cases}$$

così $f|_{\partial E}$ diventa

$$\tilde{f}(\theta, \phi) = \frac{9\sin^2\phi\cos^2\theta - 9\sin^2\phi\sin^2\theta}{1 + 9\cos^2\phi} = \frac{9\sin^2\phi\cos(2\theta)}{1 + 9\cos^2\phi}.$$

Poichè seno e coseno hanno massimo 1 e minimo -1 abbiamo che il massimo di $f|_{\partial E}$ è 9 e il minimo è -9. In conclusione il massimo e il minimo di $f|_E$ sono rispettivamente $9, -9$.

ALCUNI METODI PER RISOLVERE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Definizione. *Un'equazione differenziale è* lineare *se è della forma*

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)u(t) = f(t),$$

ovvero se i coefficienti di u e delle sue derivate dipendono solo dal tempo (o eventualmente sono costanti).

Ci sono delle strategie standard ben note per risolvere le equazioni differenziali lineari (qui di seguito ci limitiamo a considerare equazioni differenziali del primo e del secondo ordine).

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazioni differenziale lineare del primo ordine ha la forma

$$u'(t) + a_0(t)u(t) = f(t).$$

Queste si possono sempre risolvere con il seguente metodo:

- *Metodo del fattore integrante.*
  Consideriamo $e^{\mu(t)}$, dove $\mu(t)$ è un'arbitraria primitiva di a_0, ovvero $\mu'(t) = a_0(t)$. Allora, cercando una u che risolva la nostra equazione differenziale del primo ordine, abbiamo

  $$\frac{d}{dt}\left(u(t)e^{\mu(t)}\right) = u'e^{\mu} + \mu' u e^{\mu} = e^{\mu}(u' + a_0 u) = e^{\mu(t)}f(t),$$

  e quindi dal teorema fondamentale del calcolo (integrando a destra e sinistra), otteniamo

  $$u(t)e^{\mu(t)} = \int e^{\mu(t)} f(t)\, dt,$$

  ovvero se $F(t)$ è una qualunque primitiva di $e^{\mu(t)}f(t)$, le soluzioni saranno della forma

  $$u(t) = e^{-\mu(t)}(F(t) + C),$$

  al variare di C in $\mathbb{R}$.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Vediamo ora come risolvere equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti, ovvero della forma

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = f(t). \tag{1}$$

Useremo la seguente idea fondamentale per le equazioni differenziali lineari:

Osservazione. Una soluzione generale di (1) si ottiene sommando alla soluzione generale dell'equazione omogonea

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0 \tag{2}$$

una soluzione particolare qualunque di (1).

Il problema quindi si divide in due parti:

- *Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.*
  *Se immergiamo $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ e supponiamo la nostra soluzione sia della forma
$$u(t) = e^{zt}$$
  con $z \in \mathbb{C}$, (2) diventa
$$z^2e^{zt} + za_1e^{zt} + a_0e^{zt} = 0,$$
  e dividendo per e^{zt}, si tratta di trovare le radici del polinomio di secondo grado
$$z^2 + a_1z + a_0 = 0,$$
  che sono
$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2},$$
  (e niente vieta che siano complesse).
  Dalla teoria generale per le equazioni differenziali lineari sappiamo che l'insieme delle soluzioni di (2) formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Avremo allora risolto il nostro problema una volta trovate due soluzioni che siano linearmente indipendenti†. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si verifica con un conto immediato che $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ sono linearmente indipendenti, e quindi avremo che la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea (2) sarà del tipo
$$u(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$$
  al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Se invece $\lambda_1 = \lambda_2$ allora $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ non sono più linearmente indipendenti. Questo non è un grosso problema; il modo più semplice per riottenere due soluzioni che lo siano è moltiplicare una per t (provate a dimostrare che effettivamente così diventano linearmente indipendenti!). Quindi nel caso $\lambda_1 = \lambda_2$, la soluzione generale di (2) sarà del tipo
$$u(t) = C_1te^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}.$$
  Osserviamo infine che le soluzioni finali si possono prendere reali. Infatti se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, essendo il polinomio $z^2 + a_1z + a_0 = 0$, a coefficienti reali, λ_1, λ_2 devono essere coniugate, ovvero
$$\lambda_1 = A + i\omega,$$
$$\lambda_2 = A - i\omega,$$
  e quindi dalla formula di de Moivre
$$e^{\lambda_1 t} = e^{tA}(\cos(t\omega) + i\sin(t\omega)),$$
$$e^{\lambda_2 t} = e^{tA}(\cos(t\omega) - i\sin(t\omega)).$$

---

*Quello che facciamo qui è un conto formale per riassumere le idee; non diamo per esempio una definizione di esponenziale complesso, supponendo semplicemente che se $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, allora
$$e^z := e^a(\cos b + i\sin b).$$
Per una trattazione più corretta rimando al corso del Prof. Del Santo o al buon testo: `http://www.dm.unipi.it/~acquistp/analisi1.pdf` (cap. 6).

†perchè allora una qualunque soluzione si scriverà come combinazione lineare di queste due.

Essendo queste linearmente indipendenti, prendendo la somma e la differenza otteniamo ancora funzioni linearmente indipendenti. In conclusione nel caso di radici con parte immaginaria ω non nulla la soluzione generale sarà

$$u(t) = C_1 e^{At} \cos(\omega t) + C_2 e^{At} \sin(\omega t),$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- *Trovare una soluzione particolare.*
  O si procede per via euristica provando con qualche funzione che ci sembra poter risolvere l'equazione differenziale, oppure abbiamo a disposizione dei metodi certi.
  - *Metodo dei coefficienti indeterminati.*
    È un metodo veloce per risolvere equazioni differenziali in cui f è del tipo
    $$f(t) = P(t)e^{zt},$$
    con P un polinomio e $z \in \mathbb{C}$. Poniamo $m = 0, 1, 2$ rispettivamente se z non è radice, è radice singola, è radice doppia del polinomio caratteristico $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, e sia $n = \deg P$. Si sostituisce allora
    $$u(t) = t^m (a_n t^n + \cdots + a_0) e^{zt}$$
    in (1) e risolvendo per i coefficienti a_j si ottiene una soluzione particolare dell'equazione differenziale.
  - *Metodo di variazione delle costanti arbitrarie.*
    È un metodo generale per trovare la soluzione particolare di una qualunque equazione differenziale a coefficienti costanti, ma comporta spesso conti difficili. Dette u_1, u_2 le soluzioni dell'equazione omogenea (2) trovate dal punto precedente, si pone
    $$u(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t),$$
    e sostituendo quest'espressione in (1) ci si può ricondurre* al sistema lineare in $v_1'(t), v_2'(t)$:
    $$\begin{cases} v_1'(t)u_1(t) + v_2'(t)u_2(t) = 0, \\ v_1'(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2'(t) = f(t). \end{cases}$$
    Risolvendolo quindi per $v_1'(t), v_2'(t)$, integrando e risostituendo $v_1(t), v_2(t)$ in u si ottiene infine una soluzione particolare di (1).

*Potete provarlo per esercizio (altrimenti trovate la derivazione in `http://www.dm.unipi.it/~acquistp/analisi1.pdf`, pag. 388).