

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito A - Trieste, 15 febbraio 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\sqrt{\log n + \cos n + \arccos(1/n)}}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - x^3 \sin \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - e}{x-1}.$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2}$.

ii) Si dica quante sono le soluzioni dell'equazione

$$-\log(x+1) = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2}.$$

Esercizio 3. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

Si provi che

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$;

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

iii) se f è continua allora $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$;

iv) se f è convessa e derivabile allora $f'(]0, +\infty[) \subseteq]-\infty, -1]$.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Determinare il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan(e^{-k}), \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 + \sin(\frac{1}{k})}{k \ln k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{1}{k^2})}{\sin(\frac{1}{k^2})}.$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$d(x, y) = \log(1 + 2|x - y|) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Stabilire se d è una distanza su \mathbb{R} .

ii) Stabilire se esistono due costanti positive A e B tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) (**facoltativo**) Stabilire se esistono due costanti positive A e B tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in [0, 1].$$

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito B - Trieste, 15 febbraio 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\sqrt{\log n + \cos(1/n) + \arctan n}}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x^3 \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - e}{x-1}.$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x + 2)^2}$.

ii) Si dica quante sono le soluzioni dell'equazione

$$-\log(x + 2) = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x + 2)^2}.$$

Esercizio 3. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

Si provi che

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$;

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

iii) se f è continua allora $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$;

iv) se f è concava e derivabile allora $f'(]0, +\infty[) \subseteq [2, +\infty[$.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Determinare il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin(e^{-k}), \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - \sin(\frac{1}{k})}{k \ln k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{1}{k})}{\tan(\frac{1}{k})}.$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$d(x, y) = \log \left(1 + \frac{|x - y|}{2} \right) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Stabilire se d è una distanza su \mathbb{R} .

ii) Stabilire se esistono due costanti positive A e B tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) (**facoltativo**) Stabilire se esistono due costanti positive A e B tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in [0, 1].$$