

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito A - Trieste, 15 febbraio 2010

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\sqrt{\log n + \cos n + \arccos(1/n)}}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 - x^3 \sin \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - e}{x-1}.$$

**Esercizio 2.**

i) Si studi la funzione  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2}$ .

ii) Si dica quante sono le soluzioni dell'equazione

$$-\log(x+1) = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ .

Si provi che

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ;

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;

iii) se  $f$  è continua allora  $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ ;

iv) se  $f$  è convessa e derivabile allora  $f'(]0, +\infty[) \subseteq ]-\infty, -1]$ .

**Esercizio 4. (LT in Fisica)** Determinare il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan(e^{-k}), \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 + \sin(\frac{1}{k})}{k \ln k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{1}{k^2})}{\sin(\frac{1}{k^2})}.$$

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$d(x, y) = \log(1 + 2|x - y|) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Stabilire se  $d$  è una distanza su  $\mathbb{R}$ .

ii) Stabilire se esistono due costanti positive  $A$  e  $B$  tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) (**facoltativo**) Stabilire se esistono due costanti positive  $A$  e  $B$  tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in [0, 1].$$

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito B - Trieste, 15 febbraio 2010

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\sqrt{\log n + \cos(1/n) + \arctan n}}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x^3 \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - e}{x-1}.$$

**Esercizio 2.**

i) Si studi la funzione  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x + 2)^2}$ .

ii) Si dica quante sono le soluzioni dell'equazione

$$-\log(x + 2) = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x + 2)^2}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ .

Si provi che

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ;

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

iii) se  $f$  è continua allora  $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ ;

iv) se  $f$  è concava e derivabile allora  $f'(]0, +\infty[) \subseteq [2, +\infty[$ .

**Esercizio 4. (LT in Fisica)** Determinare il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin(e^{-k}), \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - \sin(\frac{1}{k})}{k \ln k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{1}{k})}{\tan(\frac{1}{k})}.$$

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$d(x, y) = \log \left( 1 + \frac{|x - y|}{2} \right) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Stabilire se  $d$  è una distanza su  $\mathbb{R}$ .

ii) Stabilire se esistono due costanti positive  $A$  e  $B$  tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) (**facoltativo**) Stabilire se esistono due costanti positive  $A$  e  $B$  tali che

$$A|x - y| \leq d(x, y) \leq B|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in [0, 1].$$