Università di Trieste – Facoltà di Scienze M. F. N.

Prova scritta di Analisi Matematica I

Trieste, 25 febbraio 2009

1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n (\cos \frac{1}{n})^{n^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}} - \sqrt{e^x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3}.$$

2. Si studi la seguente funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-1}},$$

determinandone dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivata prima, crescenza e decrescenza, massimi e minimi, derivata seconda, concavità e convessità, flessi e un abbozzo di grafico.

3. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ una funzione continua. Siano $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ due successioni in $[0, +\infty[$ tali che, per ogni n, si abbia $x_n < y_n < x_{n+1}$ e $\lim_n x_n = +\infty$. Sia $\lim_n f(x_n) = +\infty$ e $\lim_n f(y_n) = -\infty$. Si provi che:

i) esiste $(z_n)_n$ in $[0, +\infty[$ tale che $\lim_n z_n = +\infty$ e $\lim_n f(z_n) = 0$;

ii) per ogni $\gamma \in \mathbf{R}$ esiste $(w_n)_n$ in $[0, +\infty[$ tale che $\lim_n w_n = +\infty$ e $\lim_n f(w_n) = \gamma$;

iii) nell'ipotesi che f sia derivabile, esiste $(v_n)_n$ in $[0, +\infty[$ tale che $\lim_n v_n = +\infty$ e $\lim_n f'(v_n) = 0$.

4. **(corso di laurea in Fisica).** Si determini il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\sin n)}{n\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log(n+1) - \frac{1}{n} - \log n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} x \cos x \, dx;$$

4. **(corso di laurea in Matematica).** Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1 \text{ e } x, y \in \mathbf{Q}\}.$$

i) Determinare $\mathring{A}$, $\bar{A}$, ∂A, $\mathcal{F}A$.

ii) Dire se esiste ed eventualmente fornire un esempio di successione a valori in A che non ammetta sottosuccessioni convergenti in $\mathbf{R}^2$.

iii) Dire se esiste ed eventualmente fornire un esempio di successione a valori in A che non ammetta sottosuccessioni convergenti ad un elemento di A.