

Università di Trieste – Facoltà di Scienze M. F. N.

Prova scritta di Analisi Matematica I

Trieste, 17 settembre 2009

1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x).$$

2. Sia, per  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ ,  $f_n(x) = \frac{x - n}{x + n}$ ;

*ii)* si provi che, per ogni  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  e per ogni  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ;

*ii)* si provi che, per ogni  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ ,  $f_n(1) > f_n(1/2)$ ;

*iii)* si provi che, per ogni  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ ,  $f_n(1/2) \leq f_{n+1}(1)$ ;

*iv)* si consideri  $E = \left\{ \frac{x - n}{x + n} : x \in [1/2, 1[, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$  e si determinino  $E^\circ$ ,  $\bar{E}$ ,  $\partial E$ ,  $\mathcal{D}E$ .

3. Si studi la seguente funzione

$$f(x) = (x + 1)e^{-|x-1|+x},$$

determinandone dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivata prima, crescita e decrescita, massimi e minimi, derivata seconda, concavità e convessità, flessi e un abbozzo di grafico.

4. (corso di laurea in Fisica).

*i)* Si Risolvano le seguenti equazioni

$$(z - i)^2(\bar{z} + i) = 8, \quad z^2 + \operatorname{Re}z = 0.$$

*ii)* Si rappresenti sul piano di Gauss l'insieme  $E = \{z \in \mathbf{C} : \frac{|\operatorname{Re}z - \operatorname{Im}z|}{|z|} \leq 1\}$ .

4. (corso di laurea in Matematica). Sia  $A \subset \mathbf{R}$ . Definiamo

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

*i)* Si provi che se  $A$  non è limitato allora  $\operatorname{diam}(A) = +\infty$ .

*ii)* Si dia un esempio di insieme  $A$  limitato tale che per ogni  $x, y \in A$  si abbia  $\operatorname{diam}(A) > |x - y|$ .

*iii)* Si provi che se  $A$  è compatto allora esistono  $\bar{x}, \bar{y} \in A$  tali che  $\operatorname{diam}(A) = |\bar{x} - \bar{y}|$ .