

Università di Trieste – Facoltà di Scienze M. F. N.

Prova scritta di Analisi Matematica I

Trieste, 3 settembre 2009

1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \sqrt[n]{2 + \sin n}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(t/2)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x - e^{x \log(\log x)}}{x}.$$

2. Si studi la seguente funzione

$$f(x) = ((x - |x|) \arctan x) - \frac{\pi}{2},$$

determinandone dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivata prima, crescita e decrescita, massimi e minimi, derivata seconda, concavità e convessità, flessi e un abbozzo di grafico.

3. Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ una funzione convessa. Si provi che:

- i)* se $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- ii)* se $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ ed f non è costante allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- iii)* se $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ ed f è superiormente limitata allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{x \in [0, +\infty[} f$.

4. (corso di laurea in Fisica). Si determini il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^3 + x} dx.$$

4. (corso di laurea in Matematica). Sia $A \subset \mathbf{R}$. Definiamo

$$\text{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

- i)* Si provi che se A non è limitato allora $\text{diam}(A) = +\infty$.
- ii)* Si dia un esempio di insieme A limitato tale che per ogni $x, y \in A$ si abbia $\text{diam}(A) > |x - y|$.
- iii)* Si provi che se A è compatto allora esistono $\bar{x}, \bar{y} \in A$ tali che $\text{diam}(A) = |\bar{x} - \bar{y}|$.