Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, III appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________	NOME ______________________
N. Matricola ______________________	Anno di corso ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ il seguente limite:

$$L_\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha(1-\tanh(x)) + x^3\log(1+x^{-1}) + x^3\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x(\sin(x)+1)}. \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

motivare le risposte

(*i*) Si calcoli $\lim_{x\to+\infty}\left(x\log(1+x^{-1}) + x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\lg(1+x^{-1})}{x^{-1}} + \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)}{x^{-1}}\right]$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\lg(1+y)}{y} + \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2$$

(*ii*) Al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ si verifichi se il limite L_α esiste e lo si calcoli.

$$f(x) = x^2(2+o(1)) + 2x^\alpha e^{-2x}(1+o(1)) = 2x^2(1+o(1))$$

per ogni α.

$$g(x) = x^{\alpha-1}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} + x(\sin(x)+1) = x^{\alpha-1}(1+o(1)) + x(\sin(x)+1)$$

$$= \begin{cases} x^{\alpha-1}(1+o(1)) & \text{se } \alpha > 2 \\ 2x + x\sin x + x\,o(1) & \text{se } \alpha = 1 \\ x^{\alpha-1}(1+o(1)) + x(\sin(x)+1) & \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases}$$

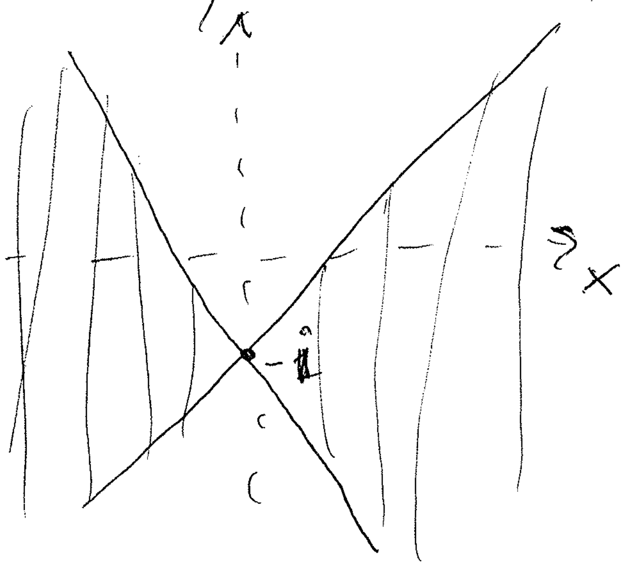
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{2x^2}{x^{\alpha-1}}(1+o(1)) \text{ se } \alpha > 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 3 \\ 2 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } 2<\alpha<3 \end{cases} \\ \frac{2x^2 \quad (1+o(1))}{2x + x\sin(x) + x\,o(1)} \text{ se } \alpha = 1 \longrightarrow +\infty \\ \frac{2x^2(1+o(1))}{x^{\alpha-1}(1+o(1)) + x(\sin(x)+1)} \geq \frac{2x^2(1+o(1))}{x^{\alpha-1}(1+o(1)) + 2x} \longrightarrow +\infty \\ \qquad \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini (facendo anche un disegno) l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) \geq Im(2z+i)\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \sup\{\frac{|z|^n}{|\bar{z}+2i|^n} : n \in \mathbb{Z}\} < \infty\}.$$

$Re\, z^2 = x^2 - y^2$, $\quad Im(2x+2iy+i) = 2y+1$

$x^2 - y^2 \geq 2y+1 \iff x^2-(y+1)^2 \geq 0 \iff (x-(y+1))(x+(y+1)) \geq 0$



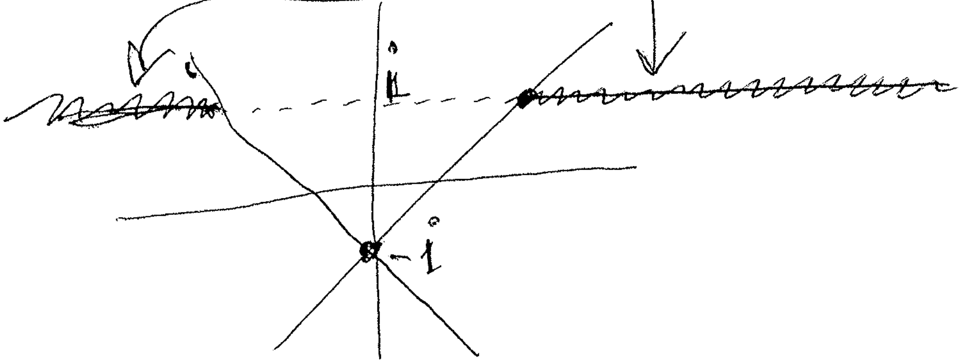
Per $r \geq 0$

$\sup_{n\in\mathbb{Z}} r^n < +\infty \iff r = 1$. Cioè $\dfrac{|z|}{|\bar{z}+2i|} = 1$

Cioè $|z|^2 = |z-2i|^2 = |x+(y-2)i|^2$

$$x^2+y^2 = x^2+y^2-4y+4 \iff y = 1$$

Quindi l'insieme cercato è



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri, per $[t] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di t (definita da $[t] \leq t < [t]+1$)

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{[t]}{(1+t)^2} dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

Siccome $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\frac{[t]}{(1+t)^2}}{t^{-1}} = 1$ segue per confronto asintotico che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- si dimostri che per $h(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ esiste $h'(0)$ e la si calcoli;

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è tale che $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Posto $k(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ risulta $k(x)$ continua. Quindi

$\ell(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è primitivab

$h(x)$ è una primitiv

con $h(x) = f(x) - \int_0^x k(x)$

$h'(0) = f'(0) - k(0) = 0 - 0$

- si calcoli $f'(x)$ dove definita, ed altrimenti $f'_d(x)$ ed $f'_s(x)$;

$f'(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & x < 0 \\ \frac{[x]}{(1+x)^2} & \text{per } x > 0, x \notin \mathbb{N}, \end{cases}$

$f'(0) = f'_s(0) = f'_d(0) = 0$

per $n \in \mathbb{N}$

$f'_s(n) = \frac{n-1}{(1+n)^2}$, $f'_d(n) = \frac{n}{(1+n)^2}$

- si calcoli $f(3/2)$;

- per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si scriva l'equazione della retta tangente a $y = g(x)$ nel punto $((f(3/2), 3/2)$.

$f(\frac{3}{2}) = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t}\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$y - \frac{3}{2} = g'(f(\frac{3}{2}))(x - f(\frac{3}{2}))$ $g'(f(\frac{3}{2})) = \frac{1}{f'(\frac{3}{2})} = (1+\frac{3}{2})^2 = \frac{2}{4}$

$$\boxed{y - \frac{3}{2} = \frac{25}{4}\left(x - \frac{3}{10}\right)}$$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^3}}$

(*i*) Si calcolino i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ in 0 di $f(x)$ per ogni $n \geq 0$.

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^3}} = x\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}} = \underbrace{x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} x^{3j}}_{p_{3n+1}(x)} + o\left(x^{3n+1}\right)$$

(*ii*) Si calcolino tutte le derivate $f^{(n)}(0)$ per ogni $n \geq 0$.

$f^{(n)}(0) = 0$ se n non è della forma $3j+1$ per qualche j.

Invece $f^{(3j+1)}(0) = (3j+1)! \binom{-\frac{1}{2}}{j} (-1)^j$

(*iii*) Si calcolino gli integrali $\int_0^1 p_n(x)dx$ per ogni $n \geq 0$.

$$\int_0^1 p_{3n+1}(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \int_0^1 x^{3j+1}\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{j} \frac{(-1)^j}{3j+2}$$