Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione invernale, III appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________	**NOME** ______________________
N. Matricola ______________________	**Anno di corso** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ il seguente limite:

$$L_\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha (1 - \tanh(x)) + x^3 \log(1 + x^{-1}) + x^3 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x(\sin(x) + 1)}.$$

motivare le risposte

(i) Si calcoli $\lim_{x \to +\infty} \left(x \log(1 + x^{-1}) + x \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) \right)$

(ii) Al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ si verifichi se il limite L_α esiste e lo si calcoli.

ESERCIZIO N. 2. Si determini (facendo anche un disegno) l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) \geq Im(2z + i)\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \sup\{\frac{|z|^n}{|\bar{z} + 2i|^n} : n \in \mathbb{Z}\} < \infty\}.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri, per $[t] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di t (definita da $[t] \le t < [t] + 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt & \text{se } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{[t]}{(1+t)^2} dt & \text{se } x \ge 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

- si dimostri che per $h(x) = \displaystyle\int_0^x \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ esiste $h'(0)$ e la si calcoli;

- si calcoli $f'(x)$ dove definita, ed altrimenti $f'_d(x)$ ed $f'_s(x)$;

- si calcoli $f(3/2)$;

- per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si scriva l'equazione della retta tangente a $y = g(x)$ nel punto $((f(3/2), 3/2)$.

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^3}}$

(i) Si calcolino i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ in 0 di $f(x)$ per ogni $n \geq 0$.

(ii) Si calcolino tutte le derivate $f^{(n)}(0)$ per ogni $n \geq 0$.

(iii) Si calcolino gli integrali $\int_0^1 p_n(x)dx$ per ogni $n \geq 0$.