Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione estiva, 8 giugno 2015, I appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME .... NOME ....

N. Matricola .... Anno di corso ....

ESERCIZIO N. 1. Per $p(x)$ un polionomio si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} p(x) + \sin(x) + e^x - 1 & \text{se } x > 0 \\ 1 - \cos(x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determini il $p(x)$ di grado minimo per il quale si ha $f \in C^2(\mathbb{R})$.

$p(0) = 0$ e per $n \geq 1$ $p^{(n)}(0) + \sin^{(n)}(0) + 1 = -\cos^{(n)}(0)$

per $n = 1, 2$. Per $n = 1$ ho $p'(0) + 2 = 0$ $p'(0) = -2$

Per $n = 2$ $p^{(2)}(0) + 1 = +1$ $p^{(2)}(0) = 0$ $p(x) = -2x$

(*ii*) Si determini il $p(x)$ di grado minimo per il quale si ha $f \in C^{10}(\mathbb{R})$.

Abbiamo bisogno di $p^{(n)}(0) + \sin^{(n)}(0) + 1 = -\cos^{(n)}(0)$ per $n \leq 10$

Per $n = 2m$ $p^{(2m)}(0) = -1 - (-1)^m = \begin{cases} -2 & m \text{ pari} \\ 0 & m \text{ dispari} \end{cases}$

Quindi per $m = 5$ ho $p^{(10)}(0) = 0$

per $n = 2m+1$ $p^{(2m+1)}(0) = -1 - \sin^{(2m+1)}(0) = -1 - (-1)^m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari} \\ -2 & m \text{ dispari} \end{cases}$

per $m = 4$ $P^{(9)}(0) = -2$ quindi ~~grado~~ ordine minimo è 9

(*iii*) Si stabilisca se esiste un polinomio $p(x)$ per il quale si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Un tale polinomio non esiste perché richiederebbe

$p^{(n)}(0) + \sin^{(n)}(0) + 1 = -\cos^{(n)}(0)$ $\forall n$

Notare che per $n >$ grado $p(x)$ ho $p^{(n)}(0) = 0$

Allora per $n = 4m$ ed $m \to \infty$ avremo

$1 = -1$, Impossibile

ESERCIZIO N. 2. Si in $\mathbb{C}$ consideri l'equazione $z^5 + |z|^3 - |z|^2 + 1 = 0$.

(*i*) Si scriva l'equazione in coordinate polari e si consideri il sistema ottenuto distinguendo tra parte reale ed immaginaria

$z = r \cdot (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$

$$\begin{cases} r^5 \sin(5\vartheta) = 0 \\ r^5 \cos(5\vartheta) + r^3 - r^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

(*ii*) Si risolva l'equazione piu' semplice, sostituendo nella piu' difficile e si determinino tutte le soluzioni possibili

$r = 0$ non da una soluz. Allora consideriamo $\sin\vartheta = 0$

Ne consegue $\cos(5\vartheta) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$. Se $\cos(5\vartheta) = 1$ abbiamo

$r^5 + r^3 + 1 = r^2$ che non ha soluzioni $r \geq 0$.

Allora consideriamo $\cos(5\vartheta) = -1$. Allora

$5\vartheta = (2n+1)\pi$ $\qquad \vartheta = \frac{(2n+1)\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$ che per

$n = 0, 1, 2, 3, 4$ da 5 cosi distinti. Abbiamo

$$0 = -r^5 + r^3 - r^2 + 1 = r^3(-r^2+1) + (-r^2+1)$$

$= (r^3+1)(1-r)(1+r)$. L'unica soluzione $r \geq 0$

è $r = 1$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \log(2) + \int_x^0 \frac{t}{1+t^4}dt & \text{se } x \le 0 \\ \int_x^{2x} \frac{t}{\log(1+t^2+t^4)}dt & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; Abbiamo che $g(t) = \frac{t}{\lg(1+t^2+t^4)}$ è monotona crescente per $t >> 1$, e quindi per $x >> 1$ per il teor. della media $f(x) = x\, g(c_x) \geq \frac{x^2}{\lg(1+x^2+x^4)} \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, in particolare si stabilisca se $f(x)$ c' continua in 0; Intanto, $f(0) = f(0^-) = \lg 2$

per $x>0$, per $x \to 0^+$ $\int_x^{2x} \frac{t}{\lg(1+t^2+t^4)} = \int_x^{2x} \frac{t}{t^2(1+o(t))}dt = \int_x^{2x} \frac{1}{t}(1+o(t))dt = \int_x^{2x}\frac{dt}{t} + o(1) = \lg 2 + o(1) \to \lg 2$. Quindi $f(0^+) =$ ed f continua

- Si calcoli $f'(x)$ o, eventualmente $f'_s(x)$ e $f'_d(x)$, dove sono definite;

Per $x<0$ $f'(x) = -\frac{x}{1+x^4}$ & $f'_s(0) = 0$

per $x>0$ $f'(x) = \frac{4x}{\lg(1+4x^2+16x^4)} - \frac{x}{\lg(1+x^2+x^4)}$

Notare che per $x \to 0^+$ $f'(x) = \frac{4x}{4x^2}(1+o(x)) - \frac{x}{x^2}(1+o(x)) = o(1) \xrightarrow{x\to 0^+} 0$

Quindi $f'_d(0) = 0$ esiste $\Rightarrow f'(0) = 0$

- si verifichi che $f|_{\mathbb{R}_-} : \mathbb{R}_- \to f(\mathbb{R}_-)$ c' biettiva, con $f|_{\mathbb{R}_-}$ la restrizione di f in $\mathbb{R}_-$;

Segue da $f'(x) = -\frac{x}{1+x^4} > 0 \quad \forall x < 0$.

- si calcoli $g'(f(-1))$ per $g : f(\mathbb{R}_-) \to \mathbb{R}_-$ la funzione inversa di $f|_{\mathbb{R}_-}$.

$$g'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-\frac{(-1)}{1+(-1)^4}} = 2.$$

ESERCIZIO N. 4.

(*i*) Si calcolino i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ in 0 di $f(x) = x^2 \sin(x^2)$ per ogni $n \geq 0$.

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+1}) \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{4j+4}}{(2j+1)!} + o(x^{4n+4})$$ ci fornisce al

variare di n tutti i polinomi di McLaurin

In particolare, se $q_n(x)$ è polinomio di ordine n per $\sin(x)$,

$x^2 q_n(x^2)$ è polinomio di ordine $2n+2$ per $f(x)$

(*ii*) Si determini il polinomio di McLaurin $p_n(x)$ con n minimo tale che $|f(x) - p_n(x)| < 10^{-10}$ per ogni $|x| \leq 10^{-1}$.

Notare che se $q_n(x)$ è come sopra

$$|\sin x - q_n(x)| \leq |\sin^{(n+1)}(c)| \frac{|x|^n}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^n}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow |f(x) - x^2 q_n(x^2)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(n+1)!} \leq \frac{10^{-2n-2}}{(n+1)!} = \text{Errore}(n)$$

per $n=3$ ho $\text{Errore}(3) = \frac{10^{-8}}{24} > 10^{-5}$

per $n=4$ ho $\text{Errore}(4) = \frac{10^{-10}}{5!} < 10^{-10}$

Quindi il polinomio è $p_{10}(x)$