Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2014-2015, sessione autunnale 7 settembre 2015
Corso prof. Cuccagna

| | |
|---|---|
| COGNOME ________________ | NOME ________________ |
| N. Matricola ________________ | Anno di corso ________________ |

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri per $a > 0$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)-(1+x^{-1})^a}{x^2e^{\frac{3x}{2}}(1-\tanh(x))+x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)\right)+\sin(x^{-1})}.$$

Si spieghino le risposte

(*i*) Si calcoli il limite per $a = 1$.

Banalmente, ~~equ~~ qualsiasi sia $a>0$ abbiamo

$x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)=o(1)$, $\quad -(1+x^{-1})^a=-1+o(1)$

(*ii*) Si calcoli il limite per $a > 1$. $\quad x^2e^{\frac{3x}{2}}(1-th(x))=o(x^{-N}) \quad \forall N$

$x\left(\frac{\pi}{2}-arctg(x^2)\right)+\sin(x^{-1})=\frac{2}{x}(1+o(1))$

Quindi abbiamo $\dfrac{-1+o(1)}{\frac{2}{x}(1+o(1))}\longrightarrow -\infty$

(*iii*) Si calcoli il limite per $0 < a < 1$.

per qualsiasi $a>0$

**ESERCIZIO N. 2.** Risolvere l'equazione $z^{12} + |z|^6 + 1 = 0$.

poni $w = z^6$

$w^2 + |w| + 1 = 0$ per $w = e^{i\vartheta} r$

$r^2(\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) + r + 1 = 0$

$$\begin{cases} r^2 \cos 2\vartheta + r + 1 = 0 \\ r \operatorname{sen} 2\vartheta = 0 \implies \sin 2\vartheta = 0 \end{cases}$$

per $\cos 2\vartheta = 1$ non ci sono soluzioni. per $\cos 2\vartheta = -1$ allora $r^2 - r - 1 = 0 \implies$

$$r_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4}}{2} \implies r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$2\vartheta = \pi + 2n\pi \implies \vartheta = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, 1$$

cioè $w_\pm = \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2} i$

infine risolvo $z^6 = w_\pm$

posto $z = r e^{i\vartheta}$ risulta $r = \sqrt[6]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

ed $e^{6i\vartheta} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$ cioè $6\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$$\vartheta = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{6} \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

| COGNOME e NOME | N. Matricola |
|---|---|
| | |

**ESERCIZIO N. 3.** Si consideri

$$f_a(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t^x}{(t^2+6t+8)}\,dt & \text{se } x > 0, \\ a & \text{se } x = 0, \\ \displaystyle\int_x^{2x} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x)$;

$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + o(t^{-1})\right) = \lim_{x\to-\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t} = \lg 2$

$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^x}{t^2+6t+8} \geq \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{10}}{t^2+6t+8} = +\infty$

- $\lim_{x\to 0^\pm} f_a(x)$;

$f_a(0^\pm) = 0$

- Si stabilisca se esistono valori $a \in \mathbb{R}$ per i quali $f_a \in C^0(\mathbb{R})$;

$\boxed{a = 0}$ perché è richiesto $a = f_a(0^\pm) = 0$

per $x < 0$ $\quad f'_a = 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Inoltre per un conto fatto varie volte $f_0(x) = \int_0^{2x} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ ammette $(f'_0)_s(0) = 0$

- Per ogni $a \in \mathbb{R}$: per $x < 0$ si determini $f'_a(x)$; si calcoli $(f_a)'_s(0)$ nel caso esista;

- si calcoli $f_a(1)$;

$f_a(1) = \int_0^x \frac{t}{t^2+6t+8}\, t$ $\quad$ Applicare Hermite

**ESERCIZIO N. 4.** Sia $f(x)$ tale che $f(x) = x^2 \log(1 + x^3)$.

($i$) Calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $\log(1 + x^3)$.

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n y^n \qquad \log(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

$$P_{3n+3}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-)^j \frac{x^{3j+3}}{j+1}$$

($ii$) Calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $f(x)$.

$$P_{3n+5}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-)^j \frac{x^{3j+5}}{j+1}$$

($iii$) Calcolare le derivate $f^{(n)}(0)$ per ogni $n$.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 3j+5 \ \forall j = 0, 1, \ldots \\ \dfrac{(-1)^j}{(j+1)} (3j+5)! & \text{se } n = 3j+5 \end{cases}$$