Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, II appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________	NOME ______________
N. Matricola ______________	Anno di corso ______________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\log(1 + x^\alpha + x^2) + 1 - \sqrt{1 + 2x}}^{f(x)}}{(1 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{\alpha}{2} x^2}$$

(*i*) Si scriva il polinomio di McLaurin di ordine 2 di $\sqrt{1 + 2x}$ ed il polinomio di McLaurin di ordine 2 di $\log(1 + x)$.

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}2x + \binom{\frac{1}{2}}{2}4x^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}4x^2 + o(x^2)$$

(*ii*) Si calcoli i valori del limite al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \lg(1 + x^\alpha + \cancel{x^2}) + 1 - \sqrt{1+2x} =$$

$$= x^\alpha + x^2 - \frac{(x^\alpha + x^2)^2}{2} + o\left((x^\alpha + x^2)^2\right) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = x^\alpha - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{(x^\alpha + x^2)^2}{2} + o(x^2) + o\left((x^\alpha + x^2)^2\right)$$

$$= \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 1 \\ -x + o(x) & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{\frac{\alpha}{2}x^2} = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-2}}{\frac{\alpha}{2}}(1 + o(1)) \to +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 + o(1) \longrightarrow 1 & \alpha = 1 \\ -\frac{2}{\alpha x}(1 + o(1)) \longrightarrow -\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione invernale, II appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME	NOME ....
N. Matricola	Anno di corso ....

ESERCIZIO N. 1. Si consideri per $\alpha \in (0, +\infty)$ il limite

$$\text{pong } L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{e^{t^\alpha}-1}{t} dt - \sin(x)}{(1+2x)^{\frac{3}{2}} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{e^{t^\alpha}-1}{t} dt - \sin(x)}{3x}$$

(*i*) Si scriva il polinomio di McLaurin di $\sin(x)$ di ordine 3 ed il polinomio di McLaurin di e^x di ordine 2

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad e^x = 1 + x + o(x)$$

(*ii*) Si calcoli il valore del limite al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\int_0^x t^{\alpha-1}(1+o(1))\, dt}{3x} - \frac{1}{3} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^\alpha}{3\alpha x} - \frac{1}{3} \right)$$

$$L = \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 & \alpha = 1 \\ -\frac{1}{3} & \alpha > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \inf\{\frac{|z+1-i|^n}{|2z+1|^n} : n \in \mathbb{N}\} > 0\}.$$

Si noti che $\inf\{r^n : n \in \mathbb{N}\} = \begin{cases} r & \text{se } r \geq 1 \\ 0 & 0 \leq r < 1 \end{cases}$ per $r \geq 0$ e questo è > 0 esattamente se $r \geq 1$

$$|2z+1|^2 \leq |z+1-i|^2$$

$$(2x+1)^2 + 4y^2 \leq (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$4x^2 + 4x + \cancel{1} + 4y^2 \leq x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + \cancel{1}$$

$$3x^2 + 2x + \cancel{2} + 3y^2 + 2y \leq 1$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 + \frac{2}{3}y \leq \frac{1}{3}$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \sup\{\frac{|2z+i|^n}{|\bar{z}+3+i|^n} : n \in \mathbb{Z}\} < \infty\}.$$

si nota che per $r \neq 0$ $\sup\{r^n : n \in \mathbb{Z}\} = \begin{cases} \infty & \text{se } r \neq 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$

$$|2z+i|^2 = |z+3-i|^2$$

$$|2x+(2y+1)i|^2 = |(x+3)+(y-1)i|^2$$

$$4x^2+4y^2+4y+\cancel{1} = x^2+6x+9+y^2-2y+\cancel{1}$$

$$3x^2+3y^2-6x+6y = 9$$

$$x^2+y^2-2x+2y+2 = 1$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = 1$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)(1+t)} dt & \text{se } x > 0, \\ \int_0^x (e^{t^4} - t) dt & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ perché $e^{t^4} - t \to +\infty$

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{C}{1+t} \qquad C = \frac{1}{1+t^2}\Big|_{t=-1} = \frac{1}{2}, \; A = -\frac{1}{2} \text{ per}$$

l'integrale

$$= \frac{(-\frac{1}{2}t+B)(1+t) + \frac{1}{2}(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{B + \frac{1}{2} + \ldots \text{monomi di grado} \geq 0}{(1+t^2)(1+t)} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

- si dimostri che $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = \int_0^x \left[-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right] = \lg \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big]$$

$x>0 \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x)} \xrightarrow{x\to 0^+} 1, \quad x<0 \quad f'(x) = e^{x^4} - x \to 1 \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$ $\quad \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\pi}{4}$

- si determini $f(\mathbb{R})$ e per $g : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'inversa di f si calcoli $g'(f(-1))$.

$$g'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{e+1}$$

$f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{\pi}{4})$ perché è un intervallo crescente e perché $f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\pi}{4}$

- si ~~determini il numero delle soluzioni~~ $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

Siccome $f'(x) > 0 \; \forall x \quad f$ cresc. $f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{\pi}{4})$

segue che $f : \mathbb{R} \to (-\infty, \frac{\pi}{4})$ è biettiva (era implicito in precedente domanda)

- si dimostri che $f \in C^5(\mathbb{R})$ e si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 5

per $x > 0$ $\quad f(x) = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + o(t^4))(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + o(t^4)) = \int_0^x (1 - t + \cancel{t^2} - \cancel{t^3} + t^4 - \cancel{t^2} + \cancel{t^3} - \cancel{t^4} + \cancel{t^4} + o(t^4))$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

per $x < 0$ $\quad f(x) = \int_0^x (1 + t^4 - t + o(t^4)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$

segue che $f(x) \in C^5(\mathbb{R})$ con $p_5 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2x} \overbrace{\frac{1+t}{t^2+5t+6}}^{g(t)} dt & \text{se } x \geq 0, \\ x^4 \sin(x^{-1}) + \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{9}x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t^{-1}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto asintotico

- si dimostri che $f \in C^1(\mathbb{R})$;

$x>0$, $f'(x) = 2 \, \frac{1+2x}{4x^2+10x+6}$

$x<0$ $f'(x) = 4x^3 \sin(x^{-1}) - x^2\cos(x^{-1}) + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}x$

Inoltre $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$, applicando Hopital $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{3}$ ed $f \in C^1(\mathbb{R})$

- si calcoli $f(1)$;

$f(1) = \int_0^2 \left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+3}\right) dt = A \lg 2 + B \lg\left(\frac{5}{3}\right)$ $A = \frac{1+t}{t+3}\Big|_{t=-2} = -1$

$B = \frac{1+t}{t+2}\Big|_{t=-3} = 2$ $f(1) = 2\lg\left(\frac{5}{3}\right) - \lg 2$

- per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si scriva l'equazione della retta tangente a $y = g(x)$ nel punto $((f(1), 1)$.

$y - 1 = g'(f(1))(x - f(1))$ dove $g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{10}{3}$

dove $f'(1) = \frac{2 \cdot 3}{4+10+6} = \frac{2 \cdot 3}{20} = \frac{3}{10}$

- si verifichi se $f^{(2)}(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se $f \in C^2(\mathbb{R})$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(f'(x) - \frac{1}{3}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{2(4x^2+10x+6) - (1+2x)(8x+10)}{(4x^2+10x+6)^2}$

$= 2\,\frac{12-10}{6^2} = \frac{4}{6 \cdot 6} = \frac{1}{9}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - \frac{1}{3}}{x} = \frac{4}{9}$ distinti $\Rightarrow$ non esiste $f''(0)$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri $I = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$

(*i*) Calcolare i polinomi di McLaurin di e^x.

$$e^x \sim \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

(*ii*) Calcolare i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di $x^2 e^{x^2}$.

$$x^2 e^{x^2} \sim \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j+2}}{j!} = P_{2n+2}$$

(*iii*) Calcolare $I_n = \int_0^1 p_n(x) dx$ e stimare l'errore $|I - I_n|$.

$$I_{2n+2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2(j+1)!}$$

per $x \in [0, 1]$

$$\left| e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \right| \leq e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| x^2 e^{x^2} - P_{2n+2}(x) \right| \leq e \frac{x^{2n+\cancel{4}}}{(n+1)!}$$

$$\left| I - I_{2n+2} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!\,(2n+5)}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri $I = \int_0^1 \sin^2(x)dx$

(*i*) Calcolare i polinomi di McLaurin di $\cos(2x)$.

$$\cos(2x) \sim \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{2^{2j} x^{2j}}{(2j)!}$$

(*ii*) Calcolare i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di $\sin^2(x)$.

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \sim \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{2^{2j-1} x^{2j}}{(2j)!}$$

(*iii*) Calcolare $I_n = \int_0^1 p_n(x)dx$ e stimare l'errore $|I - I_n|$.

$$\int_0^1 P_{2n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{2^{2j-1}}{(2j+1)!}$$

per $x \in [0,1]$

$$\left|\sin^2(x) - P_{2n}(x)\right| = \left| \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^{(2n+1)}_{|x=c} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$$

$$\leq \frac{2^{2n+1}}{2} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$|I - I_{2n}| \leq \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n+1} dx =$$

$$= \frac{2^{2n}}{(2n+2)!}$$