Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, II appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________

N. Matricola ____________________ **Anno di corso** ____________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^\alpha + x^2) + 1 - \sqrt{1 + 2x}}{(1 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} - 1}.$$

(i) Si scriva il polinomio di McLaurin di ordine 2 di $\sqrt{1 + 2x}$ ed il polinomio di McLaurin di ordine 2 di $\log(1 + x)$.

(ii) Si calcoli i valori del limite al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \sup\{\frac{|2z+i|^n}{|\bar{z}+3+i|^n} : n \in \mathbb{Z}\} < \infty\}.$$

COGNOME e NOME ______________________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2x} \frac{1+t}{t^2+5t+6} dt & \text{se } \ x \geq 0, \\ x^4 \sin(x^{-1}) + \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{9}x^2 & \text{se } \ x < 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

• $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

• si dimostri che $f \in C^1(\mathbb{R})$;

• si calcoli $f(1)$;

• per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si scriva l'equazione della retta tangente a $y = g(x)$ nel punto $((f(1), 1)$.

• si verifichi se $f^{(2)}(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se $f \in C^2(\mathbb{R})$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri $I = \int_0^1 \sin^2(x)dx$

(i) Calcolare i polinomi di McLaurin di $\cos(2x)$.

(ii) Calcolare i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di $\sin^2(x)$.

(iii) Calcolare $I_n = \int_0^1 p_n(x)dx$ e stimare l'errore $|I - I_n|$.

Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione invernale, II appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________	**NOME** ______________________
N. Matricola ______________________	**Anno di corso** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri per $\alpha \in (0, +\infty)$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{e^{t^\alpha}-1}{t} dt - \sin(x)}{(1+2x)^{\frac{3}{2}} - 1}$$

(i) Si scriva il polinomio di McLaurin di $\sin(x)$ di ordine 3 ed il polinomio di McLaurin di e^x di ordine 2

(ii) Si calcoli il valore del limite al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \inf\{\frac{|z+1-i|^n}{|2z+1|^n} : n \in \mathbb{N}\} > 0\}.$$

COGNOME e NOME ____________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)(1+t)}dt & \text{se} \;\; x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x (e^{t^4} - t)dt & \text{se} \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

- si dimostri che $f \in C^1(\mathbb{R})$

- si determini $f(\mathbb{R})$ e per $g : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'inversa di f si calcoli $g'(f(-1))$.

- si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

- si dimostri che $f \in C^5(\mathbb{R})$ e si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 5

ESERCIZIO N. 4. Si consideri $I = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$

(i) Calcolare i polinomi di McLaurin di e^x.

(ii) Calcolare i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di $x^2 e^{x^2}$.

(iii) Calcolare $I_n = \int_0^1 p_n(x) dx$ e stimare l'errore $|I - I_n|$.