Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione estiva, 22 giugno 2015, II appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

ESERCIZIO N. 1. Calcolare il seguente limite al variare di a in $(0, 2]$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{2x} \log(1+t^{-a})dt + \log\sqrt{1+x^{-1}}}{\arctan(x^{-2}) - \frac{\pi}{2}} = L_a$$

Per primo cosa il denominatore converge a $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

e $\lim_{x\to\infty} \lg(\sqrt{1+x^{-1}} = 0$

Quindi $L_a = \left(\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \lg(1+t^{-a})dt\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Ricordiamo che per $t\to\infty$

$\lg(1+t^{-a}) = t^{-a} + o(t^{-a}) = t^{-a} - \frac{1}{2}t^{-2a} + o(t^{-2a})$

per $a<1$ $\int_x^{2x} \lg(1+t^{-a})dt = x\lg(1+c_x^{-a})$ $c_x \in [x, 2x]$

$= \frac{x}{c_x^a}(1+o(1)) \geq \frac{x}{(2x)^a}(1+o(1)) = \frac{x^{1-a}}{2^a}(1+o(1)) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

per $a=1$ $\int_x^{2x} \lg(1+t^{-1})dt = \int_x^{2x}\left(t^{-1} - \frac{1}{2}t^{-2} + o(t^{-2})\right)dt$

$= \lg 2 + \int_x^{2x}\left(-\frac{1}{2}t^{-2} + o(t^{-2})\right)dt \xrightarrow{x\to+\infty} \lg 2$

per $a>1$ $\int_x^{2x} \lg(1+t^{-a})dt = \frac{x}{c_x^a}(1+o(1)) \leq \frac{x}{x^a}(1+o(1)) \xrightarrow{x\to+\infty}$

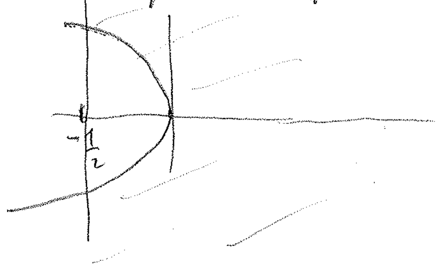
$$L_x = \begin{cases} -\infty & 0<a<1 \\ -\frac{\pi}{2}\lg 2 & a=1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri in $\mathbb{C}$ l'insieme $E=\{z:\Re(z-z^2+z\bar{z})>0\}\cap\{z:\frac{|z+1|}{|z|}<1\}$

risolvere disuguaglianze e tracciare l'insieme

$$\mathrm{Re}(z-z^2+|z|^2)=x-(x^2-y^2)+x^2+y^2=x+2y^2>0$$

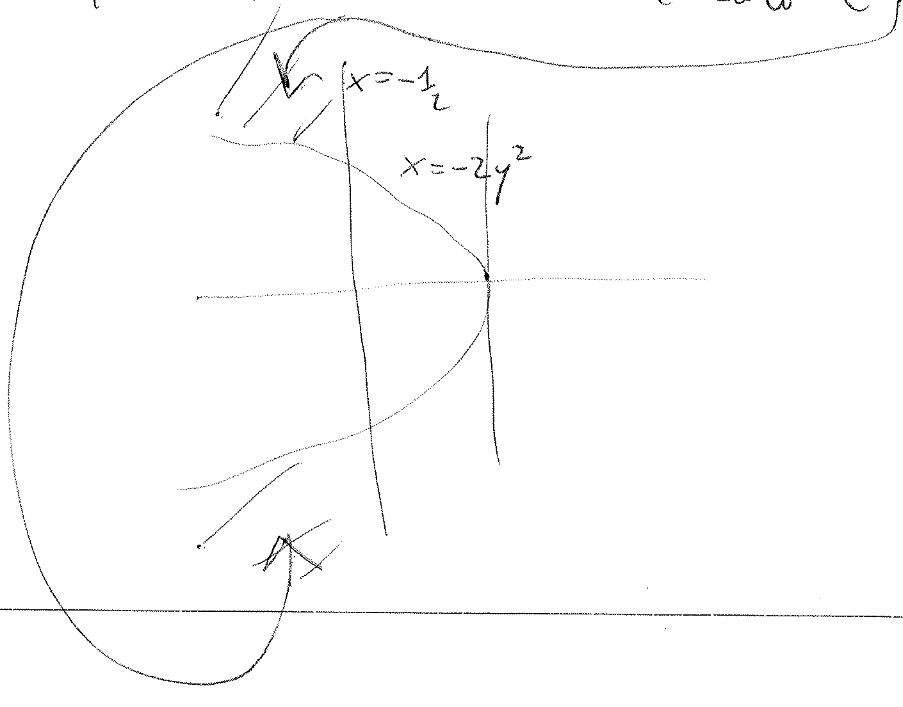
$$x>-2y^2$$



$$|z+1|<|z| \iff |z+1|^2<|z|^2 \iff (x+1)^2+\cancel{y^2}<x^2+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2}+2x+1<\cancel{x^2} \qquad x<-\frac{1}{2}$$

Quindi l'insieme cercato è,



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri per una costante $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+t)}{t}dt & \text{se } x > 0 \\ \displaystyle\int_x^{2x} \sin(t^{-1})dt + a & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \cos(t)$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$\lim_{x\to-\infty} \left[\left(\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{6}t^3 + o(t^{-3})\right)dt + a\right] = \lg 2 + a$

$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} = 0$ perche' $\frac{\cos t}{t}$ e' integrabile in $[1,+\infty)$ (per le stesse ragioni per cui $\frac{\sin t}{t}$ lo e', visto in classe)

- Si determini $a \in \mathbb{R}$ in modo che $f(x)$ sia continua in 0;

$f(0^-) = \lim_{x\to 0}\left(\int_x^{2x}\sin(t^{-1})dt + a\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{c_x}\right) + a\right] = a$

$f(0^+) = \lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t} = \lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t}dt = \lim_{x\to 0}\int_x^{2x}t^{-1}dt + \lim_{x\to 0}\int_x^{2x}o(1)dt$

$= \lg 2$

per continuita' $\boxed{a = \lg 2}$

- si calcoli $f'(x)$ per $x \neq 0$; definite;

$$f'(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) - \sin(x^{-1}) & x < 0 \\ \frac{\cos(2x)}{x} - \frac{\cos x}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

- si calcoli $f'_s(0)$ e $f'_d(0)$ e si stabilisca se esiste $f'(0)$. (e' inteso qui che $a = \lg 2$)

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x} = 0$

$f'_d(0) = 0$. Posto $G(x) = \int_0^x \sin(t^{-1})dt$ abbiamo che $G'(0) = 0$ (in classe abbiamo sicuramente visto come con $\cos(t^{-1})$ ma questo e' analogo).

$f'_s(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_x^{2x}\sin(t^{-1})dt}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{G(2x)-G(x)}{x}$

$= 2G'(0) - G'(0) = G'(0) = 0$

ESERCIZIO N. 4.

(*i*) Si calcolino tutti i polinomi di McLaurin di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j} + o(x^{2n})$$

(*ii*) Si calcolino tutti i polinomi di McLaurin di $f(x) = \arctan(x)$.

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + o(x^{2n+1})$$

$\int_0^x \varphi_n(t^2)\,dt$ con $\varphi_n(t)$ il polinomio di $\frac{1}{1+t}$ di ordine n

(*iii*) Si determini il polinomio di McLaurin $p_n(x)$ di $\arctan(x)$ con n minimo tale che per ogni $|x| \leq 10^{-1}$ si abbia $|\arctan(x) - p_n(x)| < 10^{-3}$.

$$\left| \frac{1}{1+t} - \varphi_n(t) \right| = \frac{\left| (1+t)^{(n+1)}(c_t) \right|}{(n+1)!} |t|^{n+1}$$

Ricordiamo $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha \cdots (\alpha - n + 1)\, x^{\alpha - n}$

e quindi $\left| (1+t)^{(n+1)}(c_t) \right| = |(-1) \cdots (-1-(n+1)+1)|\, |1+c_t|^{-n-2}$

$$= (n+1)!\, |1+c_t|^{-n-2} \leq (n+1)!$$

Quindi $\left| \frac{1}{1+t} - \varphi_n(t) \right| \leq |t|^{n+1}$

$$\left| \arctan(x) - p_{2n+1}(x) \right| = \left| \int_0^x \left[\frac{1}{1+t^2} - \varphi_n(t^2) \right] dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{|x|} |t|^{2n+2}\, dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{10^{-2n-3}}{2n+3}$$

per $|x| \leq 10^{-1}$. Quindi basta scegliere $n=0$ cioè il polinomio $p_1(x) = x$.