Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, I appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Per $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e per $[x] \in \mathbb{Z}$ con $[x] \le x < [x]+1$ la funzione parte intera, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left[\frac{1}{x}\right]} + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ 2x + a \displaystyle\int_x^0 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt + b\ \sinh(x) & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Si spieghino le risposte

(i) Si determinino i valori di (a,b) t.c. f e' continua in 0.

(ii) Per ogni (a,b) calcolare $f'(x)$ nei punti dove e' definita, ed altrimenti calcolare $f'_d(x)$, $f'_s(x)$ nei punti dove sono definite.

(iii) Si determinino i valori di (a,b) t.c. $f'(0)$ esiste, calcolandone il valore esatto .

ESERCIZIO N. 2. Si determini le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^6 - |z|^4 + |z|^2 = 1$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\int_0^x \frac{3+t}{(1+t)(2+t)} dt & \text{se } x > 0, \\ \sqrt{1 - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{se } -\frac{1}{2} \le x \le 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

- $f'(x)$;

- si determinino massimi e minimi locali ed assoluti, dove $f(x)$ cresce e dove decresce;

- si calcoli $f(1)$;

per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si scriva l'equazione della retta tangente a $y = g(x)$ nel punto $((f(1), 1)$.

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $f(x) = x^3 \sin(x^2)$

(i) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $\sin(x)$.

(ii) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $f(x)$.

(iv) Calcolare $f^{(13)}(0)$.

Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione invernale, I appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri per $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} + x\left(1 - \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{se } x > 0, \\ x + a\, x(\cos(x) - 1) + b\sin(x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si spieghino le risposte

(i) Si determinino i valori di (a,b) t.c. $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(ii) Si determinino i valori di (a,b) t.c. $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(iii) Stabilire, giustificando la risposta, qual'e' il massimo $n \in \mathbb{N}$ t.c. esistono (a,b) t.c. $f \in C^n(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) > Re(z^2)\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \frac{|2z-i|}{|2\bar{z}+3|} \leq 1\}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{2}{(1+t)^2(2+t)}dt & \text{se } \; x > 0, \\ x^2 + x & \text{se } \; x \leq 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

- si calcoli $f'(x)$

- si determinino massimi e minimi locali ed assoluti, dove $f(x)$ cresce e dove decresce

- si determini $f(\mathbb{R}_+)$ e per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si calcoli $g'(f(1))$.

- si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $f(x) = \dfrac{x}{8 - x^3}$

(i) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $\frac{1}{1-x}$.

(ii) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $\frac{1}{1-x^3}$.

(iii) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $f(x)$.

(iv) Calcolare $f^{(13)}(0)$.

Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, I appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________________	**NOME** ______________________
N. Matricola ______________________	**Anno di corso** ______________

ESERCIZIO N. 1. Per $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e per $[x] \in \mathbb{Z}$ con $[x] \leq x < [x]+1$ la funzione parte intera, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left[\frac{1}{x}\right]} + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & \text{se } x > 0, \\ 2x + a\ \sinh(x) + b \displaystyle\int_x^0 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si giustifichino le risposte

(i) Si determinino i valori di (a,b) t.c. f e' continua in 0.

(ii) Per ogni (a,b) calcolare $f'(x)$ nei punti dove e' definita, ed altrimenti calcolare $f'_d(x)$, $f'_s(x)$ nei punti dove sono definite.

(iii) Si determinino i valori di (a,b) t.c. $f'(0)$ esiste, calcolandone il valore esatto .

ESERCIZIO N. 2. Si determini le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^6 + |z|^4 - |z|^2 = 1$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ______________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\int_0^x \frac{3+t}{(1+t)(2+t)} dt & \text{se } \ x > 0, \\ \sqrt{1 - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{se } \ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

- Si calcolino $f'_s(x)$, $f'_d(x)$ e $f'(x)$ laddove sono definite;

- si determinino massimi e minimi locali ed assoluti, dove $f(x)$ cresce e dove decresce;

- si calcoli $f(2)$;

per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si scriva l'equazione della retta tangente a $y = g(x)$ nel punto $((f(2), 2)$.

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $f(x) = x^2 \cos(x^2)$

(i) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $\cos(x)$.

(ii) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $f(x)$.

(iv) Calcolare $f^{(14)}(0)$.

Esame di Analisi matematica I: esercizi

A.a. 2014-2015, sessione invernale, I appello

Corso prof. Cuccagna

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________

N. Matricola ____________________ **Anno di corso** ____________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri per $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} + x\left(1 - \tanh\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) & \text{se } x > 0, \\ x + a\sin(x) + b\, x(\cos(x) - 1) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si giustifichino le risposte

(i) Si determinino i valori di (a,b) t.c. $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(ii) Si determinino i valori di (a,b) t.c. $f \in C^1(\mathbb{R})$.

(iii) Stabilire, giustificando la risposta, qual'e' il massimo $n \in \mathbb{N}$ t.c. esistono (a,b) t.c. $f \in C^n(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) > Re(z^2)\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \frac{|2z-i|}{|2\bar{z}+1|} \leq 1\}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2(2+t)} dt & \text{se } x > 0, \\ x^2 + x & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

- si calcoli $f'(x)$

- si determinino massimi e minimi locali ed assoluti, dove $f(x)$ cresce e dove decresce

- si determini $f(\mathbb{R}_+)$ e per $g : f(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ l'inversa di $f|_{\mathbb{R}_+}$ si calcoli $g'(f(1))$.

- si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $f(x) = \dfrac{x}{16 - x^2}$

(i) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $\frac{1}{1-x}$.

(ii) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $\frac{1}{1-x^2}$.

(iii) Calcolare i polinomi di Taylor in 0 di $f(x)$.

(iv) Calcolare $f^{(20)}(0)$.