Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2013-2014, sessione estiva, I appello

COGNOME ______	NOME ______
N. Matricola ______	Anno di corso ______
Corso di S. CUCCAGNA	

ESERCIZIO N. 1. Si consideri $F(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} - x$ per $x \geq 1$ dove $[x] \in \mathbb{Z}$ è la parte intera di $x \in \mathbb{R}$ definita da $[x] \leq x < [x] + 1$.

(*i*) Si stabilisca dove $F(x)$ è continua, dove è continua a destra e dove è continua a sinistra.

$[x]$ è continua a destra $\Rightarrow$ $F(x)$ continua a destra $\forall x$.

$F(x)$ discontinua in $\mathbb{N} \cap [2, \infty)$

(*ii*) Si stabilisca per quali $x \geq 1$ esistono la derivata $F'(x)$, la derivata destra $F'_d(x)$ e la derivata sinistra $F'_s(x)$, calcolandole.

$F'_d(x) = (-x)' = -1 \quad \forall x$, $\quad F'(x) = -1 \quad \forall x \notin \mathbb{N} \cap [2, \infty)$,

$F'_s(x)$ non esiste in $\mathbb{N} \cap [2, +\infty)$

(*iii*) Si determini dove $F(x)$ è monotona.

$F(x)$ decrescente in $[n, n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ma non in intervalli più grandi

(*iv*) Si calcoli $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Sia $n = [x]$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - x = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} - x + 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x} - x + 1$$

$$= \lg x - x + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty \quad \text{per confronto.}$$

ESERCIZIO N. 2. Si ponga

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+i|^2 + \Re e \frac{1}{z} < |z|^2 + 2\Im m z + 1 \right\}.$$

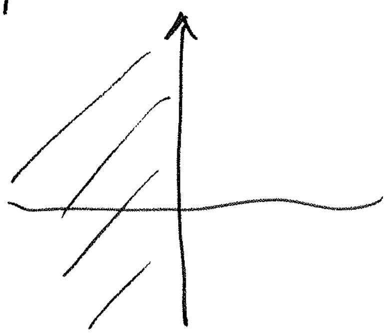
Si descriva e si rappresenti l'insieme E nel piano di Gauss.

In coordinate $z = x + iy$ la disuguaglianza diviene

$$x^2 + (y+1)^2 + \frac{x}{x^2+y^2} < x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$\cancel{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \frac{x}{x^2+y^2} < \cancel{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} < 0 \qquad \text{cioè} \qquad x < 0$$



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+|t|}}\,dt$$

Si determinino:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

f(x) è dispari. Per $x>0$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = \frac{x}{\sqrt{1+c_x}} \quad \text{con } x \le c_x \le 2x$$

$$\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+2x}}}_{\to +\infty} \le f(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- $f'(x) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2|x|}} - \frac{1}{\sqrt{1+|x|}}$$

dal Teor. Fond. Calcolo

- dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente

Notare che $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+2|x|}} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|}} \Leftrightarrow \frac{4}{1+2|x|} = \frac{1}{1+|x|} \Leftrightarrow 3+2|x|=0$

cioè mai. Inoltre $f'(0)=1 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall x$

cioè f(x) è crescente

- per ogni $k \in \mathbb{R}$ trovare il numero delle soluzioni x dell'equazione $f(x) = k$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e f(x) strett crescent

$\Rightarrow f^{-1}(k)$ ha esattamente 1 elemento

$\forall k \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{se } x \geq 0, \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(*i*) Dimostrare che $f(x)$ ammette derivate continue di ordine 2 in $\mathbb{R}$.

Intanto basta verificare in $x=0$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

. Da qui segue facilmente che $f \in C^2(\mathbb{R})$

(*ii*) Calcolare il polinomio di Taylor $p_2(x)$ di ordine 2 di $f(x)$ in 0.

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

(*iii*) Stimare l'errore $|f(x) - p_2(x)|$ per $x \geq 0$.

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$ per un qualche $0 < c < x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(c) = \frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}}$$

Abbiamo per $c \in (0,x)$, $\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} < f'''(c) < \frac{3}{8}$

$$\Rightarrow |f(x) - P_2(x)| < \frac{1}{3!}\,\frac{3}{8}x^3 = \frac{1}{16}x^3$$