Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2013-2014, sessione estiva, II appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-x^\alpha}-\cos(x^{\frac{\alpha}{2}})}{\log(1+\log(1+x^\beta))}$ al variare di $\alpha, \beta \in (0,\infty)$.

$\sqrt{1-x^\alpha} = \sum_{j=0}^{n} (-)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} x^{j\alpha} + o(x^{n\alpha})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. In particolare per $n=2$

$$\sqrt{1-x^\alpha} = 1 - \frac{x^\alpha}{2} - \frac{x^{2\alpha}}{8} + o(x^{2\alpha})$$

$$\cos(x^{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{x^\alpha}{2} + \frac{x^{2\alpha}}{4!} + o(x^{2\alpha}) = 1 - \frac{x^\alpha}{2} + \frac{x^{2\alpha}}{24} + o(x^{2\alpha})$$

Perciò $\sqrt{1-x^\alpha} - \cos(x^{\frac{\alpha}{2}}) = -\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) = -\frac{1}{6}x^{2\alpha}(1+o(1))$

$$\lg(1+x^\beta) = x^\beta + o(x^\beta)$$

$$\lg(1+\lg(1+x^\beta)) = \lg(1+x^\beta+o(x^\beta)) = x^\beta + o(x^\beta) = x^\beta(1+o(1))$$

Perciò la nostra funzione è

$$\frac{-\frac{1}{6}x^{2\alpha}(1+o(1))}{x^\beta} = -\frac{1}{6}x^{2\alpha-\beta}(1+o(1)) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} 0 & \text{se } \beta<2\alpha \\ -\frac{1}{6} & \beta=2\alpha \\ -\infty & \text{se } \beta>2\alpha \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si stabilisca il numero delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 + |z|^2 = 1$.

$z = re^{i\vartheta} = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$z^3 = r^3 e^{i3\vartheta} = r^3(\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta))$ $\qquad |z|^2 = r^2$

$$r^3(\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta)) + r^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} r^3\cos(3\vartheta) + r^2 = 1 \\ r^3\sin(3\vartheta) = 0 \end{cases}$$

La 2° equazione è soddisfatta da $r=0$ (che non soddisfa la 1° equazione) o da $\sin 3\vartheta = 0$ cioè da $3\vartheta = \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$.

Per n dispari la 1° equazione si riduce a $-r^3 + r^2 = 1$ cioè $r^2 = 1 + r^3$ che non ha soluzioni (Infatti se $0 \leq r \leq 1$ è facile capire da $r \leq 1$ che $r^2 < 1 + r^3$. Se $r > 1$ allora da $r^2 < r^3$ segue $r^2 < 1 + r^3$ a maggior ragione).

Per n pari $n = 2k$ ho $\vartheta = \frac{2\pi k}{3}$ $k = 0, 1, 2$ (per altri valori di $k \in \mathbb{Z}$ ottengo uno dei numeri complessi ottenuti per $k = 0, 1, 2$)

La 1° equazione diviene $r^3 + r^2 - 1 = 0$

Se denotiamo con $f(r)$ la destra notiamo che

1) $f(0) = -1$

2) $\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$

3) $f'(r) = 3r^2 + 2r \geq 0$

Pertanto $f(r) = 0$ ha esattamente una soluzione $r_0 \in (0, +\infty)$.

Quindi le soluzioni sono $(r_0, 0), (r_0, \frac{2\pi}{3}), (r_0, \frac{4\pi}{3})$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ______________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt & \text{se } x \geq 0, \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si determinino:

- $\lim_{x \to 0^\pm} f(x)$.

$0 \leq |x^2 \sin(\frac{1}{x})| \leq x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0 \implies \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ segue dalla continuità di $\int_{x_0}^x g(t)\,dt$ su $\mathbb{R}$ per $g(t)$ localmente integrabile in $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

$\lim_{x\to -\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\int_x^{2x} t^{-1}(1+t^{-2})^{\frac{1}{2}}\,dt =$

$= \int_x^{2x} \left(t^{-1} + O(t^{-3})\right) dt = \lg 2 + O(x^{-2}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lg 2$

- si stabilisca dove $f'_d(x)$, $f'_s(x)$ e $f'(x)$ sono definite e le si calcoli

per $x<0$ $\quad f'(x) = 2x\sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})$; $f'_s(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \sin(x^{-1})}{x} = 0$

per $x>0$ $\quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$

- per ogni $k \in \mathbb{R}$ trovare il numero delle soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione $f(x) = k$.

Notare che $f'(x) > 0$ $\forall\, x > 0$. Pertanto $f([0,+\infty)) = [0, \lg 2)$ e pertanto per $k \in [0, \lg 2)$ esiste esattamente un $x \in [0,+\infty)$ con $f(x) = k$. Per $k \notin [0, \lg 2)$ l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni $x \in [0, \infty)$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$$

(i) Si calcoli $p_7(x)$, il polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine 7 in 0.

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4) = 1 + t^2 + \frac{e^{c_t}}{2} t^4$$ per un opportuno $c_t \in (0, t^2)$

$$\int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt = x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10}) = \underbrace{x^2 + \frac{x^6}{3}}_{p_7(x)} + o(x^8)$$

Cioè $p_7(x) = x^2 + \dfrac{x^6}{3}$

(ii) Stimare l'errore $|f(x) - p_7(x)|$ per $x \in (0,1)$.

$$|f(x) - p_7(x)| = \int_0^{x^2} \frac{e^{c_t}}{2} t^4\, dt \le \frac{e}{2}\,\frac{x^{10}}{5} = \boxed{\frac{e}{10} x^{10}}$$