

Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi

A.a. 2013-2014, sessione invernale, I appello

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Si consideri

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + 2x^\alpha} - 1 - x^2}{\log(1 + x + x^2) - x}.$$

Si calcoli il limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

ESERCIZIO N. 2. Si ponga

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z|}{i+z} \neq \bar{z} \right\} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im(z^2 + 2iz) \geq 0 \right\} .$$

Si risolvano le disuguaglianze e si rappresenti l'insieme E nel piano di Gauss.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}.$$

(i) Si determinino

• il dominio di f :

• i segni di f :

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

• $f'(x) =$

• i segni di f' :

• la crescita, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f :

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \text{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Si provi che f ristretta all'intervallo $]0, e[$ è invertibile e si determini il dominio della funzione inversa.

(iv) Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto $(\frac{1}{2e}, \frac{1}{e})$.

ESERCIZIO N. 4. Considerare la funzione

$$f(x) = \int_1^x \left(\int_0^t (1+s)^2 \log(1+s) ds \right) dt.$$

(i) Calcolare $p_{1,1}(x)$, il polinomio di Taylor di ordine 1 di $f(x)$ in 1.

(ii) Trovare una costante C tale che $|f(x) - p_{1,1}(x)| < C$ per tutti gli $x \in [0, 1]$.