Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi

A.a. 2013-2014, sessione autunnale

Corso prof. Cuccagna

COGNOME ______________ NOME ______________

N. Matricola ______________ Anno di corso ______________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si provi che esiste un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ tale che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x < 0, \\ e^x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ p(x) & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \text{è di classe } C^1.$$

La condizione è'

$p(0) = 1 \qquad p'(0) = 1 \Rightarrow p(x) = 1 + x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$p(1) = e \qquad p'(1) = e \Rightarrow p(1) = 2 + a_2 + \dots + a_n = e$

$p'(1) = 1 + 2a_2 + \dots + n a_n = e$

(ii) Si verifichi che ci sono infiniti polinomi $p(x)$ che verificano il punto (i).

Quindi si tratta di tutti i polinomi della forma $p(x) = 1 + x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ t.c.

$$\begin{cases} a_2 + \dots + a_n = e - 2 \\ 2a_2 + \dots + n a_n = e - 1 \end{cases}$$

Se $n \geq 3$ il sistema ammette soluzioni e quindi ci sono infiniti polinomi

(iii) Si determini il $p(x)$ di grado minimo.

Per $n = 3$ ho il sistema

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = e - 2 \\ 2a_2 + 3a_3 = e - 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-2 \\ e-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e-2 \\ e-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(e-2) - (e-1) \\ -2(e-2) + (e-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e-5 \\ -e+3 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO N. 2. Si ponga

$$f(z) = \frac{z-i}{1+\bar{z}}.$$

(*i*) Si determini il dominio di f.

Il denominatore è $\neq 0$ esattamente per $\bar{z} \neq -1$ cioè per $z \neq -1$

(*ii*) Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme $f^{-1}(E)$, con $E = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$.

$$z \in f^{-1}(E) \iff f(z) \in E \iff |f(z)| \leq 1$$

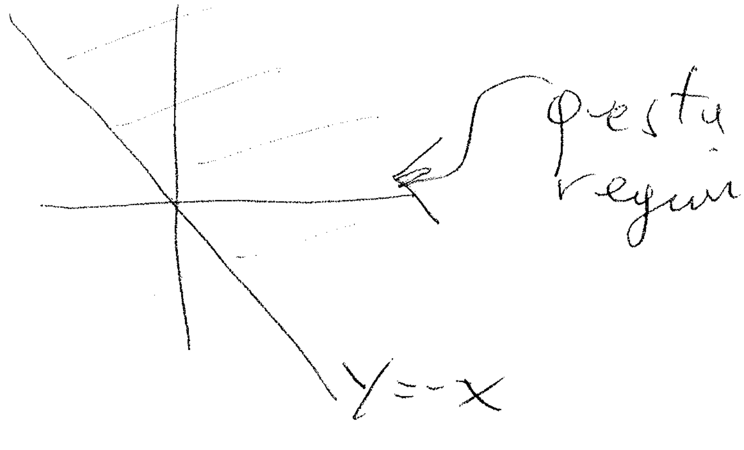
$$\left|\frac{z-i}{1+\bar{z}}\right| \leq 1 \iff \left|\frac{z-i}{z+1}\right| \leq 1 \iff |z-i| \leq |z+1|$$

$$\iff |x+(y-1)i|^2 \leq |(x+1)+yi|^2$$

$$\iff x^2+(y-1)^2 \leq (x+1)^2+y^2$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1} \leq \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{2}(x+y) \geq 0$$



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$\begin{cases} |2x+1|-1 & \text{se } x<0, \\ \displaystyle\int_x^{2x} \sinh(t^2)\,dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determini, giustificando la risposta, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$f(x) = x\sinh(c^2) \quad c \in [x, 2x]$

$\geq x\sinh(x^2) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$

(*ii*) Si determinino

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x-2 = +\infty$
- $\lim_{x\to0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to0^-} 2x = 0 \\ \lim_{x\to0^+} \int_x^{2x} sh(t^2)dt = 0 \end{cases}$
- $f'(x)$:

$-2 \quad x < -\frac{1}{2}$

$2 \quad x \in (-\frac{1}{2}, 0)$

$2\sinh(4x^2) - \sinh(x^2)$ se $x>0$

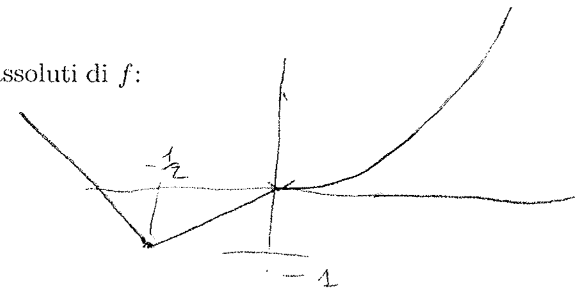
- $f'_s(-\frac{1}{2}) = -2$ • $f'_d(-\frac{1}{2}) = 2$ • $f'_s(0)$: 2 • $f'_d(0)$: 0
- i segni di f':

per $x>0$ $f'(x) = (8\, ch(2x^2)ch(x^2) - 1)\, sh(x^2) \geq 7\, sh(x^2) > 0$

$x < -\frac{1}{2}$ $f'(x) = -2 < 0$

$-\frac{1}{2} < x < 0$ $f'(x) = 2 > 0$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:



- il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli

$$I = \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\int_x^1 \operatorname{arctg} t\, dt\right) \operatorname{arctg} x\, dx.$$

RISULTATO

$$I = \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right) \operatorname{artg}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} \lg\left(1 + \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)^2\right)$$

SVOLGIMENTO

poni $u(x) = \int_x^1 \operatorname{arctg} t\, dt$.

Allora l'integrale coincide con

$$I = -\int_0^1 \operatorname{arctg}(u(x))\, u'(x)\, dx \cancel{\;=\;}$$

Ricordiamoci che $\int \operatorname{artg} y\, dx = y \operatorname{artg} y - \int \frac{y}{1+y^2} =$

$$= \underbrace{y \operatorname{arctg} y - \lg\sqrt{1+y^2}}_{A(y)} + c$$

$$u(x) = \frac{\pi}{4} - \lg\sqrt{2} - x \operatorname{arctg} x + \lg\sqrt{1+x^2}$$

$u(0) = \frac{\pi}{4} - \lg\sqrt{2}$ $\qquad u(1) = 0$

$$I = A(u(1)) - A(u(0)) =$$

$A(u(1)) = (1)$ $\qquad A(u(0)) = u(0) \operatorname{arctg}(u(0)) - \lg\sqrt{1+u^2(0)}$