Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2013-2014, sessione estiva, III appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) - \sin(x^\alpha) + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1+x^3}-1}$ al variare di $\alpha \in (0,\infty)$.

$\sqrt{1+x^3} - 1 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3(1+o(1))$

$\lg(1+y) = \int_0^y \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^y (1-t+t^2+o(t^2))\,dt = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$

$\lg(1+x^\alpha) = x^\alpha - \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{3\alpha}}{3} + o(x^{3\alpha})$

$\sin(x^\alpha) = x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{6} + o(x^{3\alpha})$

$\lg(1+x^\alpha) - \sin(x^\alpha) + \frac{x^2}{2} = \cancel{x^\alpha} - \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{3\alpha}}{3} - \cancel{x^\alpha} + \frac{x^{3\alpha}}{6} + \frac{x^2}{2} + o(x^{3\alpha})$

Se $0<\alpha<1$ allora il numeratore è $-\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$

e pertanto $\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^{2\alpha}}{2}}{\frac{1}{2}x^3} = -\infty$

Se $\alpha = 1$ il numeratore è $\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ e pertanto

il limite è $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}} = 1$

Se $\alpha > 1$ il numeratore è $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e pertanto

il limite è $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{1}{2}x^3} = +\infty$

ESERCIZIO N. 2. Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 + 2|z|^2 = 1$.

$z = re^{i\vartheta}$ $\quad r^4\left(\cos(4\vartheta) + i\sin(4\vartheta)\right) + 2r^2 = 1$

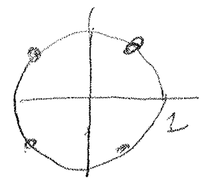
in coordinate dirette

$$\begin{cases} r^4\cos(4\vartheta) + 2r^2 = 1 \\ r^4\sin(4\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Siccome $r = 0$ non può essere una soluzione, deve essere $4\vartheta = k\pi$. Se k è dispari risulta $\cos(4\vartheta) = -1$

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \iff r = 1$$

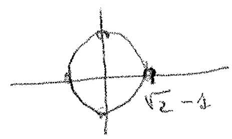
$$\vartheta = \frac{2n+1}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad n = 0, 1, 2, 3$$



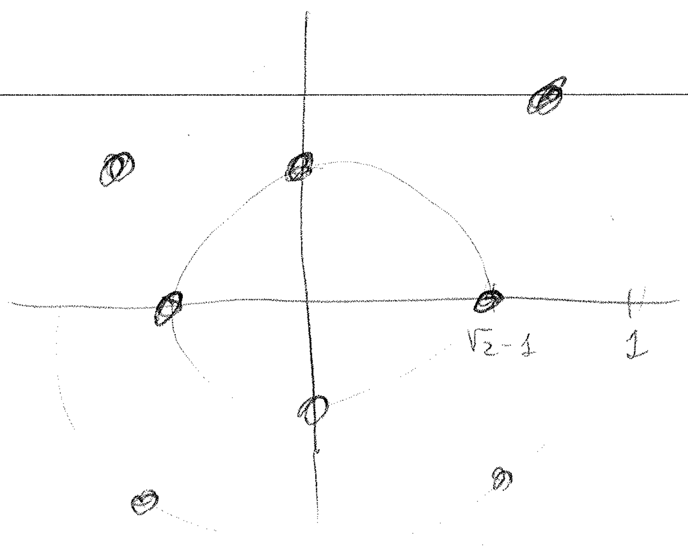
Se k è pari $\cos(4\vartheta) = 1$

$$r^4 + 2r^2 - 1 = 0 \quad r_\pm = -1 \pm \sqrt{2} \quad \text{ovvero } r = r_+ = \sqrt{2} - 1$$

$$\vartheta = \frac{2n\pi}{4} = \frac{\pi}{2}n \quad n = 0, 1, 2, 3$$



Quindi in totale 8 soluzioni



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Per $[x] \le x < [x]+1$ con $[x] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di x, si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \log\left(1 + \frac{1}{1+[t]}\right) dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_x^0 te^{-t^2}\,dt & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

$\int_x^0 te^{-t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_x^0 = \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2} \xrightarrow{x\to-\infty} -\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x lg\left(1+\frac{1}{1+[t]}\right)dt$ esiste per via del Teor di Aut Aut. Siccome $\lim_{t\to+\infty}\frac{lg\left(1+\frac{1}{1+[t]}\right)}{\frac{1}{1+t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+[t]}}{\frac{1}{1+t}} = 1$

segue per confronto asintotico che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- si stabilisca dove $f'_d(x)$, $f'_s(x)$ e $f'(x)$ sono definite e le si calcoli

In $(-\infty, 0)$ $f'(x) = -xe^{-x^2}$ (teor fond calcolo); $f'_s(0) = 0$

per $x \ge 0$ $f'_d(x) = lg\left(1+\frac{1}{1+[x]}\right)$, in particolare $f'_d(0) = lg(2)$, sempre dal teor. fond calcolo. Per $x \notin \mathbb{N}$ questo e' il valore della derivata. Infine per $x \in \mathbb{N}, x>0$, $f'_s(0) = lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$

- si determinino massimi e minimi locali ed assoluti, dove $f(x)$ cresce e dove decresce

Notare che per $x \le 0$ si ha $f'(x) \ge 0$ e che per $x > 0$ $f(x)$ e' strett crescente. ~~Quindi f(x)~~ Inoltre f e' continua

- per ogni $k \in \mathbb{R}$ trovare il numero delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = k$.

quindi $f(x)$ e' strett. crescente con

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

per $k > -\frac{1}{2}$ $f(x) = k$ ammette esattamente una soluzione. Per $k \le -\frac{1}{2}$ $f(x) = k$ non ha soluzioni.

ESERCIZIO N. 4. Si ponga

$$f(x) = \int_0^x t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

(*i*) Si determini il massimo n per il quale la derivata n-esima $f^{(n)}(x)$ c' definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si calcolino le derivate $f^{(j)}(x)$ per ogni $1 \leq j \leq n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

per $x \neq 0$ $\quad f'(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$ pertanto $f'(0) = 0$

per $x \neq 0$ $\quad f''(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

per $x = 0$ $\quad f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Tuttavia $f'''(0)$ non esiste perché $\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{x}$ non esiste

Pertanto $n = 2$

(*ii*) Per il massimo n del punto (*i*), si calcoli $p_n(x)$, il polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine n in 0.

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = 0$$

(*iii*) Stimare l'errore $|f(x) - p_n(x)|$ per $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - P_2(x)| = |f(x)| \leq \left| \int_0^x t^2 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{|x|^3}{3}$$